

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Научно-исследовательский институт ядерной физики  
имени Д.В. Скобельцына



Н.В.Никитин, П.Р.Шарапова, Н.В. Колотинский

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ





МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

---

Никитин Н.В., Шарапова П.Р., Колотинский Н.В.

# **Сборник задач по квантовой физике**

Издательство КДУ

Москва

2015

УДК 530.145(07.8)

ББК 22.314

H62

Рецензенты:

д.ф.-м.н. С.П. Баранов (ФИАН им. П.Н.Лебедева)

д.ф.-м.н. А.В. Бережной (НИИЯФ МГУ им. М.В.Ломоносова)

**Никитин Н.В., Шарапова П.Р., Колотинский Н.В.**

**H62**

**Сборник задач по квантовой физике:** учебное пособие / Н.В. Никитин, П.Р. Шарапова, Н.В. Колотинский — М.:Издательство КДУ, 2015 — 144 с.:ил.

ISBN: 978-5-91304-581-2

Сборник задач соответствует программам межфакультетского курса по основам квантовой физики и спецкурсу «Матрица плотности», которые в течении ряда лет читаются авторами на Физическом факультете Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова. Задачи поделены на 22 семинара, охватывающие программы обоих курсов. В следствие синтетического характера пособия, сборник содержит задачи различного уровня сложности. Одни из них характерны для курсов общей физики, другие – соответствуют серьезным теоретическим курсам квантовой механики.

Сборник задач предназначен для студентов естественно-научных специальностей высших учебных заведений, обучающихся по программам подготовки бакалавров, магистров и специалистов.

УДК 530.145(07.8)

ББК 22.314

© Никитин Н.В., Шарапова П.Р., Колотинский Н.В., 2015

© Издательство КДУ, 2015

**ISBN: 978-5-91304-581-2**

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Семинар N1. Системы единиц, формула Планка, фотоэффект</b>	<b>6</b>
<b>Семинар N2. Эффект Комптона, атом Томсона, опыты Резерфорда</b>	<b>9</b>
<b>Семинар N3. Атом Бора и водородоподобные ионы</b>	<b>11</b>
<b>Семинар N4. Гипотеза корпускулярно-волнового дуализма Луи де Бройля и ее экспериментальное подтверждение</b>	<b>12</b>
<b>Семинар N5. Основы математического формализма квантовой механики</b>	<b>15</b>
<b>Семинар N6. Аксиоматика квантовой механики и теория представлений</b>	<b>19</b>
<b>Семинар N7. Стационарное уравнение Шредингера. Одномерный случай</b>	<b>22</b>
<b>Семинар N8. Одномерные потенциалы</b>	<b>24</b>
<b>Семинар N9. Полный момент. Сложение моментов</b>	<b>26</b>
<b>Семинар N10. Движение в поле центральных сил. Атом водорода и водородоподобные ионы. Щелочные металлы</b>	<b>27</b>
<b>Семинар N11. Нестационарное уравнение Шредингера</b>	<b>30</b>
<b>Семинар N12. Матрица плотности</b>	<b>35</b>
<b>Семинар N13. Запутанные состояния</b>	<b>43</b>
<b>Семинар N14. Квантовая энтропия и квантовая информация</b>	<b>49</b>

<b>Семинар N15.</b> Движение квантовых систем в магнитном поле. Уравнение Паули.	<b>53</b>
<b>Семинар N16.</b> Неравенства Белла, Вигнера и Леггетта-Гарга	<b>55</b>
<b>Семинар N17.</b> Теория возмущений — I	<b>62</b>
<b>Семинар N18.</b> Уравнение Дирака	<b>64</b>
<b>Семинар N19.</b> Теория возмущений — II	<b>64</b>
<b>Семинар N20.</b> Атом в магнитном поле. Эффекты Зеемана и Пашена-Бака. Сверхтонкое расщепление	<b>65</b>
<b>Семинар N21.</b> Неразличимые частицы. Фермионы и бозоны. Атом гелия. Приближение $LS$ и $jj$ -связи. Другие многоэлектронные атомы. Термы. Правило Хунда.	<b>67</b>
<b>Семинар N22.</b> Физика элементарных частиц	<b>69</b>
<b>Ответы</b>	<b>77</b>
<b>Приложение 1.</b> Физические константы и единицы.	<b>129</b>
<b>Приложение 2.</b> Элементарные частицы	<b>132</b>
<b>Приложение 3.</b> Периодическая система химических элементов	<b>138</b>
<b>Приложение 4.</b> Некоторые интегралы и специальные функции	<b>140</b>

## Введение

Квантовую механику невозможно освоить без самостоятельного решения большого числа задач. Великий итальянский физик, Нобелевский лауреат Энрико Ферми полагал, что умение решать квантовомеханические задачи тождественно пониманию квантовой теории. С ним, правда, не соглашались другие великие (и тоже Нобелевские лауреаты) Н. Бор, В. Гейзенберг, Л. де Бройль, П. Дирак. Они не оспаривали важность решения задач, но на первое место ставили глубокое осмысление оснований квантовой теории. Для студентов, только начинающих изучать квантовую физику, важно и то, и другое.

В настоящем сборнике помещены задачи, которые предлагаются студентам Физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова как дополнение к межфакультетскому курсу квантовой физики и спецкурсу по матрице плотности. В следствие синтетического характера пособия, сборник содержит задачи различного уровня сложности. Одни из них более уместны для курсов общей физики, другие – соответствуют серьезным теоретическим курсам квантовой механики. Значительное число задач с минимальными изменениями заимствовано из различных учебников, сборников задач, монографий и обзоров. Тем не менее, в сборнике имеется существенное число оригинальных задач. Заметная часть задач посвящена основаниям квантовой теории, что делает данное учебное пособие отличающимся от многочисленных задачников аналогичной направленности.

Задачи, рядом с которыми стоит знак “ $\diamond$ ”, являются задачами повышенной трудности. Их студенты могут решать (или не решать) по своему желанию. Остальные задачи разбирались на семинарах или предлагались для самостоятельного решения.

О своих замечаниях, предложениях по улучшению задачника и замеченных опечатках просьба сообщать авторам по электронной почте [679nik@mail.ru](mailto:679nik@mail.ru).

## Семинар N1. Системы единиц, формула Планка, фотоэффект

- 1.1 В системе СГС единицей измерения силы является *дина* или сокращенно *дин* (от греческого слова  $\deltaύναμις$  – сила). По определению, 1 дина равна силе, которая, действуя на тело массой 1 г, сообщает ему ускорение  $1 \text{ см/с}^2$ . Проверить, что  $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$ .
- 1.2 В системе СГС единицей измерения энергии является *эрг* (от греческого слова  $\acute{\epsilon}\rho\gamma\omicron\nu$  – работа). По определению, 1 эрг равен работе силы в 1 дин на пути в 1 см. Показать, что  $1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$ .
- 1.3 Найти величину заряда электрона в системе СГСЭ, если в системе СИ этот заряд равен  $e = 1,602176565(35) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .
- 1.4 В системе СГСЭ нет специального названия для единицы измерения напряжения. Используя выражение для силы Лоренца, проверить, что  $1 \text{ В} = 1/300$  единиц напряжения СГСЭ.
- 1.5 Показать, что
- $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ;
  - $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ .
- 1.6 Вычислить массы покоя электрона  $e^-$  и протона  $p$  в  $\text{МэВ}/\text{с}^2$ .
- 1.7 Какую скорость имеет электрон, кинетическая энергия которого равна
- 1 эВ?
  - 1 МэВ?
- 1.8 При помощи формализма комплексной экспоненты в одномерном случае описать дифракцию Фраунгофера для монохроматической волны частоты  $\omega$  на щели шириной  $d$  в одномерном случае.
- 1.9 Показать, что в классическом случае  $\langle \varepsilon_\omega(T) \rangle = kT$ .

**1.10** Показать, что плотность числа колебаний в единице объема:

**а)** в одномерном случае  $dn_\omega = \frac{d\omega}{\pi c}$ ;

**б)** в двумерном случае  $dn_\omega = \frac{\omega d\omega}{2\pi c^2}$ ;

**в)** в трехмерном случае  $dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ .

**1.11** Показать, что в квантовом случае

$$\langle \varepsilon_\omega(T) \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

**1.12** Определить среднее число фотонов в единице объема полости  $\langle n_\omega(T) \rangle$ , заполненной излучением абсолютно черного тела с температурой  $T$ .

**1.13** Найти асимптотику формулы Планка и выражения для  $\langle n_\omega(T) \rangle$  при

**а)**  $\hbar\omega \gg kT$ ;

**б)**  $\hbar\omega \ll kT$ .

**1.14** Зная  $\rho_\omega(T)$ , найти  $\rho_\lambda(T)$ .

**1.15** Показать, что в квантовом случае энергия излучения в единице объема  $U \sim T^4$  (закон Стефана-Больцмана).

**1.16** Доказать, что  $\lambda_{\max}T = \text{const}$  и  $\omega_{\max}/T = \text{const}$  (закон смещения Вина), где  $\lambda_{\max}$  и  $\omega_{\max}$  – длина волны и частота в спектре излучения абсолютно черного тела, на которые приходится максимальная энергия излучения.

**1.17** Среди звезд есть красные карлики и голубые гиганты, желтые (как наше Солнце) и белые звезды. Нет только зеленых звезд. Почему?

**1.18** Образовавшееся в результате Большого взрыва, реликтовое излучение, которое заполняет всю Вселенную, имеет температуру порядка 2,7 К



и находится в тепловом равновесии. Оцените, в каком диапазоне длин волн следует искать такое излучение.

**Указание:** Солнце имеет эффективную температуру  $\sim 6000\text{К}$  и максимум излучения в районе  $550\text{ нм}$ .

- 1.19** Мощность излучения лампочки  $P = 10\text{ Вт}$ . Средняя длина волны излучаемых фотонов  $\lambda = 600\text{ нм}$ . Оценить интенсивность потока фотонов от лампочки, то есть количество фотонов, приходящееся на один кубический сантиметр.
- 1.20** Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вылетающих из медного электрода, освещаемого монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 250\text{ нм}$ . Работа выхода электрона из меди  $W = 4,17\text{ эВ}$ . Ответ получить в системе СГС.
- 1.21** Определить частоту  $\omega$ , соответствующую красной границе фотоэффекта на серебре, если работа выхода электрона из серебра  $W = 4,28\text{ эВ}$ . Ответ получить в системе СГС.
- 1.22** Максимальная скорость фотоэлектронов при освещении цезиевого электрода монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 451\text{ нм}$  оказалась равной  $v = 5,5 \cdot 10^7\text{ см/с}$ . Определить работу выхода электронов из цезия. Ответ выразить в электронвольтах.
- 1.23** На металлическую поверхность (работа выхода  $W = 3,6\text{ эВ}$ ) воздействует электромагнитное поле по закону

$$E(t) = E_0 \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t),$$

где  $E_0$  – напряженность электрического поля волны. Найти спектр энергий фотоэлектронов, если  $\omega_1 = 2,4 \cdot 10^{15}\text{ 1/с}$  и  $\omega_2 = 6,4 \cdot 10^{15}\text{ 1/с}$ . Ответ выразить в электронвольтах.

## Семинар N2. Эффект Комптона, атом Томсона, опыты Резерфорда

- 2.1 Показать, что свободный электрон не может излучить или поглотить свободный фотон.  
**Указание:** воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса для релятивистских частиц.
- 2.2 Фотон частоты  $\omega$  сталкивается с движущимся ему навстречу электроном, кинетическая энергия которого  $T \gg \hbar\omega$ . Пусть частота рассеянного фотона равна  $\omega'$ , фотон рассеивается назад.
- а) Найти частоту  $\omega'$ .
  - б) Как соотносятся между собой частоты  $\omega'$  и  $\omega$ :  $\omega' \gg \omega$ ,  $\omega' \sim \omega$  или  $\omega' \ll \omega$ ?
  - в) Решить задачу численно, если  $\hbar\omega = 1$  КэВ и  $T = 50$  МэВ.
  - г) Решить задачу численно, если  $\hbar\omega = 1$  КэВ и  $T = 50$  КэВ.
- 2.3 Как соотносятся между собой разницы длин волн фотона при рассеянии на свободном неподвижном электроне и протоне при одинаковых углах рассеяния? Выразить ответ численно.
- 2.4 Фотон с энергией  $\hbar\omega = 1$  КэВ рассеивается на свободном покоящемся протоне. Какова частота рассеянного фотона, если рассеяние происходит точно назад?
- 2.5 Фотон рассеивается на движущемся ему навстречу электроне. После рассеяния частота фотона не изменилась. Найти начальную скорость электрона.
- 2.6 Записать формулу Брэгга-Вульфа в трехмерном случае.
- 2.7 **Задача на дифракцию n-ого порядка Брэгге-Вульфа.** На кристаллической структуре с периодом  $5 \text{ \AA}$  дифрагируют кванты с длиной волны

$\lambda$ . Одному из главных дифракционных максимумов соответствует угол  $\theta = 30^\circ$ , при этом наибольший порядок наблюдаемого спектра  $m = 5$ . Определить  $\lambda$ .

- 2.8** При ускоренном движении электрон излучает, следовательно, теряет энергию. Этот процесс может быть описан введением так называемой силы радиационного трения, которая имеет вид  $\vec{F} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$ . Оцените время излучения атома в модели Томсона.
- 2.9** Оценить максимальный угол рассеяния  $\alpha$ -частиц с энергией  $E_\alpha = 5$  МэВ на атоме золота  $Z_{Au} = 79$  в модели Томсона. Радиус атома можно принять равным  $R = 10^{-8}$  см.
- 2.10** Определить частоты излучения атома золота в модели Томсона, если атом находится в постоянном внешнем магнитном поле напряженностью  $H = 10^5$  Э. Ответ записать в системе СГС.
- 2.11** Получить формулу Резерфорда для дифференциального эффективного поперечного сечения рассеяния нерелятивистской заряженной частицы в телесный угол  $\Omega$  в кулоновском поле другой неподвижной заряженной частицы.
- 2.12** Используя экспериментальные данные, с помощью формулы Резерфорда оценить размер ядер. Ответ записать в системе СГС.
- 2.13** Протоны, ядра лития и ядра углерода, ускоренные одной и той же разностью потенциалов, проходят через тонкую платиновую фольгу. Какие из этих частиц будут рассеиваться сильнее всего?
- 2.14** Каким прицельным параметром  $b$  должна обладать  $\alpha$ -частица с энергией  $E_\alpha = 4,31$  МэВ, чтобы рассеяться на угол  $\theta = \pi/2$  на бесконечно тяжелом ядре с зарядом  $Z = 30$ ?

### Семинар №3. Атом Бора и водородоподобные ионы

- 3.1 Вычислить (в эВ) энергию ионизации атома водорода. Учесть, что масса покоя электрона равна  $0,51 \text{ МэВ}/c^2$ .
- 3.2 Может ли атом водорода поглощать фотоны с энергией, превышающей энергию ионизации?
- 3.3 Во сколько раз скорость электрона на первой боровской орбите атома водорода меньше скорости света?
- 3.4 Найти выражение для постоянной Ридберга  $R_H$  в теории Бора. Как записать энергетический спектр атома водорода при помощи этой постоянной?
- 3.5 Оценить поправки к уровням энергии атома водорода за счет гравитационного взаимодействия электрона и протона. Можно ли наблюдать эти поправки экспериментально?
- 3.6 Позитроний – это связанное состояние электрона и его античастицы позитрона. Найти спектр энергии позитрония и радиусы боровских орбит. Какова энергия ионизации позитрония?
- 3.7 Исходя из теории Н.Бора показать, что не может существовать водородоподобный ион с зарядом ядра  $Z > 1/\alpha_{em}$ .
- 3.8 Вычислить энергию, которую надо сообщить атому водорода, чтобы его серия Бальмера содержала только одну спектральную линию.
- 3.9 Первоначально покоящийся атом водорода испустил фотон с частотой, соответствующей головной линии серии Лаймана. Определить скорость атома после испускания фотона и смещение частоты фотона из-за отдачи атома.

- 3.10** В модели Бора показать, что при  $n \rightarrow \infty$  движение электрона в атоме водорода можно рассматривать как классическое.
- 3.11** Пылинка находится в поле черной дыры. Взяв типичные параметры, оценить энергетический спектр пылинки. В каком диапазоне частот можно наблюдать излучение пылинки при ее переходе с первой на вторую «боровскую» орбиту?

#### **Семинар №4. Гипотеза корпускулярно-волнового дуализма Луи де Бройля и ее экспериментальное подтверждение**

- 4.1** Показать, что для молекулы водорода и атома гелия при комнатной температуре их дебройлевские длины волн порядка длины волны мягких рентгеновских лучей. На основе этого предложите эксперименты, которые можно поставить для проверки волновых свойств водорода и гелия.
- 4.2** Какова скорость электрона, дебройлевская длина волны которого равна половине его комптоновской длины волны?
- 4.3** Получить приближенное выражение для длины волны де Бройля ультрарелятивистской частицы. При помощи этой формулы вычислить дебройлевскую длину волны протона в Большом адронном коллайдере (LHC, CERN, Швейцария). Энергия каждого протона в коллайдере порядка 4 ТэВ. Какую ошибку при вычислении длины волны де Бройля можно совершить, если пользоваться нерелятивистским выражением для импульса протона?
- 4.4** Определить длины волн де Бройля для электрона и протона с энергиями  $T = 10$  МэВ. Какими формулами для энергий частиц нужно пользоваться в каждом из двух случаев?
- 4.5** До какой энергии надо разогнать электрон, чтобы соответствующая ему длина волны де Бройля была равна 1 нм, 1 пм и 1 фм?

- 4.6** Для нахождения уровней энергии атома водорода де Бройль предположил, что электроны могут двигаться только по таким круговым орбитам, на которых образуется стоячая волна, то есть по орбитам, на которые укладывается целое число волн де Бройля. Показать, что в этих предположениях уровни энергии атома водорода в теориях Л. де Бройля и Н. Бора совпадают.
- 4.7** Теннисный мячик массой  $m = 50$  г со скоростью  $v = 10$  м/с влетает в оконный проем шириной 1 м. Вычислить угловую ширину центрального дифракционного максимума для этого мячика, считая, что окно было открытым и стекло уцелело.
- 4.8** Из оптики известно, что мы можем различать предметы, размеры которых имеют порядок длины волны падающего на них света. Аналогичный критерий применим и к волнам материи Л. де Бройля. Исходя из этого, оценить, при каких энергиях электронов можно исследовать внутреннюю структуру протона и нейтрона?
- 4.9** В релятивистской и нерелятивистской теориях связь между волновыми и корпускулярными свойствами свободно движущейся частицы выражается одинаковыми по виду формулами:

$$E = \hbar\omega \quad \text{и} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Однако, в релятивистской теории под  $E$  понимается полная, а в нерелятивистской – только кинетическая энергия частицы. Почему эти два выражения в нерелятивистской области не приводят к противоречию, ведь они различаются на величину энергии покоя частицы?

- 4.10** Электрон падает из вакуума на поверхность кристалла. Найти выражение для показателя преломления электронных волн де Бройля  $n$ , если

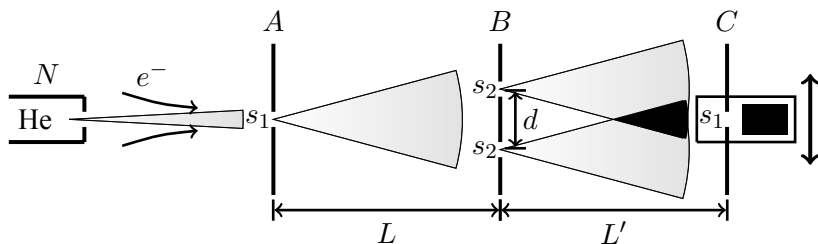


Рисунок 4.1. Схема эксперимента по интерференции атомов гелия.  $N$  – печька;  $A$  – экран с щелью  $s_1$ ,  $B$  – экраны с двумя щелями  $s_2$  и расстоянием между ними  $d$ ;  $C$  – экран и детектор.

работа выхода электрона из кристалла равна  $W$ . Показать, что в рассматриваемом случае остается справедливым известный из оптики закон преломления волн на границе двух сред.

**4.11** В эксперименте по интерференции атомов гелия (О. Carnal, J. Mlynek, Phys. Rev. Lett., **66**, p. 2689 (1991)) использовалась стандартная интерференционная схема с двумя щелями (см. рис. 4.1). Ширина щели  $s_1$  равнялась 2 мкм, а щели  $s_2$  – 1 мкм, расстояние между щелями  $d = 8$  мкм. Дистанция между экраном  $B$  и детектором  $C$  составляла  $L' = 64$  см. В печике  $N$  атомы гелия нагревались до температуры  $T = 295$  К. Зная эти данные, найти длину волны де Бройля атомов гелия и среднее расстояние между максимумами на экране  $C$ . Сравнить полученный результат с экспериментально измеренным расстоянием между максимумами, равным  $7,7 \pm 0,5$  мкм.

**4.12** В эксперименте по дифракции фуллерена (см. рис. 4.2) пучок молекул  $C_{60}$  направлялся на дифракционную решетку с периодом  $d = 100$  нм. На расстоянии  $L = 1,25$  м от решетки измерялась дифракционная картина. Хорошо видны три максимума (нулевой, первый и минус первый) на расстоянии  $x \sim 25$  мкм друг от друга. Оценить по этим данным среднюю скорость молекул фуллерена.

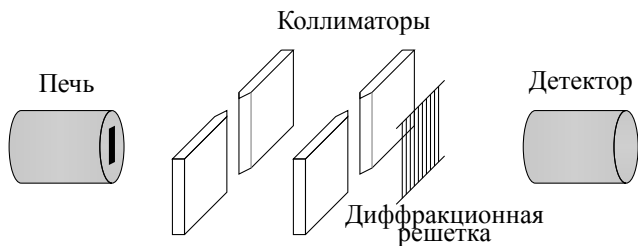


Рисунок 4.2. Схема эксперимента по дифракции фулерена

## Семинар N5. Основы математического формализма квантовой механики

5.1 Исходя из аксиом скалярного произведения, докажите, что:

$$\langle \lambda \times \varphi | \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi | \psi \rangle.$$

5.2 Докажите, что если совокупность векторов  $|\varphi_i\rangle$  образует базис в линейном пространстве  $\mathcal{H}$ , то:

а)  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \|\varphi_i\| \|\varphi_j\|$  и

б) коэффициенты разложения по базису определяются формулой:

$$c_i = \langle \varphi_i | \psi \rangle / \|\varphi_i\|^2.$$

5.3 Используя определение базиса и результат задачи 5.2, докажите единственность разложения  $|\psi\rangle$  по базису  $|\varphi_i\rangle$ .

5.4 Запишите в самом общем виде нормированный на единицу вектор в двумерном гильбертовом пространстве. В качестве базиса выберите вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 При каком соотношении между углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  норма вектора

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$



а) максимальна; б) минимальна; в) равна единице?

5.6 Докажите, что:

а)  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}];$

б)  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A}, \hat{B}\} \hat{C} - \hat{B} \{\hat{A}, \hat{C}\};$

в)  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] \hat{D} + \hat{A}\hat{C} [\hat{B}, \hat{D}] + \hat{C} [\hat{A}, \hat{D}] \hat{B} + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{D} \hat{B};$

г)  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = \hat{A} \{\hat{B}, \hat{C}\} \hat{D} - \hat{A}\hat{C} \{\hat{B}, \hat{D}\} - \hat{C} \{\hat{A}, \hat{D}\} \hat{B} + \{\hat{A}, \hat{C}\} \hat{D} \hat{B};$

д) тождество Якоби:  $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0.$

5.7 В одномерном линейном пространстве найдите коммутатор:

$$\left[ x, \frac{\partial}{\partial x} \right].$$

5.8 Пусть коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ . Дополнительно потребуем, чтобы  $[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0$ . Докажите, что

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n \hat{C} \hat{B}^{n-1}.$$

5.9 Пусть оператор  $\hat{A}$  – линейный. Докажите, что  $\hat{A}^*$ ,  $\hat{A}^T$  и  $\hat{A}^\dagger$  являются линейными операторами.

5.10 Показать, что  $(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{A}^* \hat{B}^*$  и  $(\hat{A}\hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T$ .

5.11 Показать, что если  $\hat{A}$  – эрмитов оператор, то оператор  $\hat{B} = i\hat{A}$  является антиэрмитовым.

**5.12** Доказать, что произвольный линейный оператор  $\hat{A}$  можно представить в виде суммы эрмитового и антиэрмитового операторов.

**5.13** Всегда ли операторная функция от эрмитового оператора сама является эрмитовым оператором? Если нет, то привести несколько примеров.

**5.14** Каков результат действия оператора  $\sin(\hat{A})$  на вектор состояния  $|\psi\rangle$ , которое раскладывается по базису  $|a\rangle$  следующим образом:

$$|\psi\rangle = \int da \cos(a) |a\rangle?$$

**5.15** Доказать справедливость формулы:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

для произвольных линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ .

**5.16** Доказать формулу Глаубера-Бекера-Хаусдорфа

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\hat{C}/2} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{+\hat{C}/2},$$

где операторы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  удовлетворяют следующим условиям коммутации:  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ ,  $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$  и  $[\hat{C}, \hat{B}] = 0$ .

**5.17** Доказать, что любой унитарный оператор можно записать в виде  $\hat{U} = e^{i\hat{A}}$ , где  $\hat{A}$  – эрмитовый оператор.

**5.18** Доказать, что произвольный линейный оператор  $\hat{O}$  может быть записан в виде  $\hat{O} = \hat{U} \hat{A}$ , где  $\hat{U}$  – унитарный оператор, а  $\hat{A}$  – эрмитовый.

**5.19** Проверить, что антиунитарный оператор  $\hat{W}$  можно выразить через унитарный оператор  $\hat{U}$  и оператор комплексного сопряжения  $\hat{K}$  по формулам:

$$\hat{W} = \hat{K} \hat{U} = \hat{U} \hat{K}.$$

**5.20**  $\delta$ -функцией Дирака называется такая **обобщенная функция**, интегрирование произведения которой с любой достаточно гладкой функцией  $f(x)$  (последняя в математической литературе получила название **носителя**) выполняется по правилу:

$$\int dx f(x) \delta(x - \tilde{x}) = f(\tilde{x}).$$

Доказать, что:

**а)**  $\int dx \delta(x - \tilde{x}) = 1$ ;

**б)**  $\delta(x) = \delta(-x)$ ;

**в)** если в аргументе  $\delta$ -функции стоит регулярная на области интегрирования функция  $g(x)$ , то

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - \tilde{x}_i)}{\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\tilde{x}_i}},$$

где  $\tilde{x}_i$  являются корнями уравнения  $g(x) = 0$ , лежащими в области интегрирования;

**г)** для  $\delta$ -функции можно пользоваться следующим «наглядным» определением:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0 \\ \infty, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

**д)** справедливы следующие интегральные представления для  $\delta$ -функции Дирака:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-\tilde{x})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-\tilde{x})} = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dk}{\pi} \cos(k(x - \tilde{x})) = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-\tilde{x})} = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.3)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cos(n(x - \tilde{x})) = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.4)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\eta(x - \tilde{x}))}{\pi(x - \tilde{x})} = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\eta(x - \tilde{x})/2)}{\pi \eta (x - \tilde{x})^2/4} = \delta(x - \tilde{x}); \quad (5.20.6)$$

В соотношениях (5.20.2)-(5.20.3) аргумент  $x - \tilde{x} \in [-\pi, \pi]$ .

## Семинар №6. Аксиоматика квантовой механики и теория представлений

**6.1** На рисунке 6.1 представлена графическая интерпретация произведения  $\hat{P}_o \otimes \hat{P}_e = \hat{0}$ . Нарисуйте аналогичную интерпретацию для произведения  $\hat{P}_e \otimes \hat{P}_o = \hat{0}$ .

**6.2** Используя определение несимметричного символа измерения, докажите, что:

$$\hat{P}_{a b_i} \otimes \hat{P}_{b_j c} = \begin{cases} \hat{P}_{a c}, & \text{если } b_i \equiv b_j; \\ \hat{0}, & \text{если } b_i \neq b_j. \end{cases}$$

**6.3** Записать принцип суперпозиции для вектора состояния  $\langle \psi |$ .

**6.4** Доказать, что если  $\hat{P}_{a_j}$  – проекционный оператор на состояние  $|a_j\rangle$ , то вероятность измерения величины  $a_j$  в состоянии  $|\psi\rangle$  задается формулой:

$$w_j = \langle \psi | \hat{P}_{a_j} | \psi \rangle \equiv \langle \hat{P}_{a_j} \rangle_\psi.$$

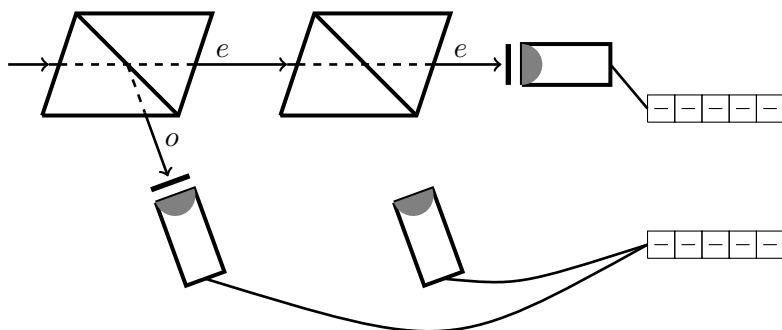


Рисунок 6.1. Графическая интерпретация произведения  $\hat{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\mathcal{P}}_e = \hat{0}$  при помощи макроприбора, состоящего из двух последовательных призм Николя и снабженного непрозрачными заглушками на пути обыкновенного “o” и необыкновенного “e” лучей. Такому прибору соответствует нулевой символ измерения  $\hat{0}$

**Указание** Воспользуйтесь принципом суперпозиции и результатом задачи 6.3.

- 6.5 С помощью принципа суперпозиции дайте качественные объяснения явлениям интерференции и дифракции.
- 6.6 Проследите связь между экспериментом Бибермана-Сушкина-Фабриканта и трактовкой следующих постулатов квантовой механики: принципа суперпозиции и постулата о физическом смысле коэффициента разложения в принципе суперпозиции.
- 6.7 Пусть система обладает одновременно как дискретным, так и непрерывным спектром. Показать, что в этом случае единичный оператор можно представить в виде

$$\hat{1}_a = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| + \int da |a\rangle \langle a| = \sum_i \hat{P}_{a_i} + \int da \hat{P}(a).$$

**6.8** Показать, что ядро оператора  $\hat{x}$  в  $x$ -представлении можно записать как  $\langle x | \hat{x} | \tilde{x} \rangle = x \delta(x - \tilde{x})$ .

**6.9** Известны ядра операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в  $c$ -представлении  $A(c, \tilde{c})$  и  $B(c, \tilde{c})$  соответственно. Кроме того, известны собственные функции оператора  $\hat{C}$  в  $d$ -представлении  $\Psi_c(d)$ . Найти ядро оператора  $\hat{A}\hat{B}$  в  $d$ -представлении. Для упрощения вычислений принять, что операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{D}$  эрмитовы и обладают только непрерывным спектром.

**6.10** Ядро оператора  $\hat{A}$  в  $b$ -представлении имеет вид

$$\langle b | \hat{A} | \tilde{b} \rangle = A(b, \tilde{b}) \delta(b - \tilde{b}).$$

Найти ядро оператора  $\hat{A}^n$  в  $b$ -представлении.

**6.11** Пусть ядро некоторого оператора  $\hat{A}$  в произвольном  $b$ -представлении имеет вид  $\langle b | \hat{A} | \tilde{b} \rangle = A(b, \partial/\partial b, \partial^2/\partial b^2, \dots) \delta(b - \tilde{b})$ . Как в  $b$ -представлении будет выглядеть запись  $|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$ ?

**6.12** Написать, какому уравнению и какому условию нормировки удовлетворяют функции  $\Phi_b(a) \equiv \langle a | b \rangle$ .

**6.13** Зная выражение ядра оператора  $\hat{p}$  в  $x$ -представлении, найти вид ядра этого оператора в  $p$ -представлении.

**6.14** Найти в  $p$ - и  $x$ -представлениях ядро оператора  $\hat{p}^n$ .

**6.15** Как выглядит нормировка вероятности, если оператор  $\hat{A}$  обладает только дискретным, только непрерывным или смешанным дискретным и непрерывным спектрами?

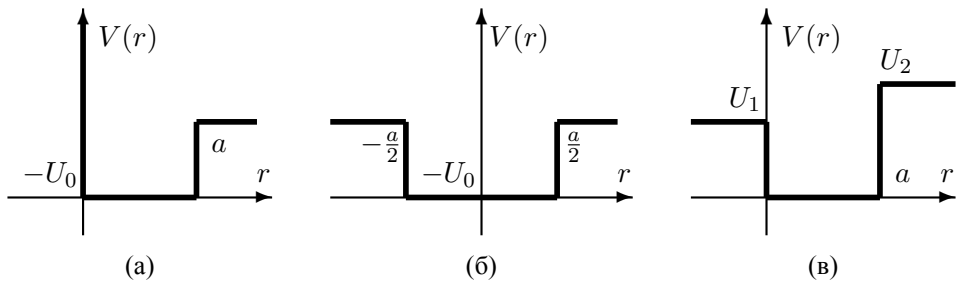


Рисунок 7.1

**6.16 Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния.** Невозможно создать точную копию произвольного чистого состояния, то есть не возможно реализовать процедуру, при помощи которой из произвольного вектора состояния  $|\phi\rangle$  и “пустого” вектора состояния  $|0\rangle$  получается две копии вектора  $|\phi\rangle$ , то есть:

$$|\phi\rangle |0\rangle \rightarrow |\phi\rangle |\phi\rangle.$$

**6.17 Теорема о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния.** Если имеются две копии неизвестного чистого состояния, то невозможно удалить одну из копий так, чтобы другая осталась нетронутой. Иначе говоря, невозможен процесс:

$$|\phi\rangle |\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle |0\rangle.$$

## Семинар N7. Стационарное уравнение Шредингера. Одномерный случай

7.1 Найти стационарные уровни энергии и отвечающие им волновые функ-

ции (в координатном представлении) для частицы массы  $m$ , находящейся в потенциальной яме (см. рис. 7.1) вида:

**а)**

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > a \\ -U_0, & \text{если } a \geq x \geq 0 ; \\ +\infty, & \text{если } 0 > x \end{cases}$$

**б)**

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > a/2 ; \\ -U_0, & \text{если } |x| \leq a/2 \end{cases}$$

**в)**

$$U(x) = \begin{cases} U_2, & \text{если } x > a \\ 0, & \text{если } a \geq x \geq 0 . \\ U_1, & \text{если } 0 > x \end{cases}$$

**7.2** Найти уровни энергии и собственные функции связанных состояний частицы массы  $m$  в поле двух  $\delta$ -ям:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m} k_0 \delta(x - a) - \frac{\hbar^2}{m} k_0 \delta(x + a),$$

где  $k_0$  – параметр ямы. Специально рассмотреть случай удаленных  $\delta$ -ям ( $k_0 a \gg 1$ ).

**7.3** Найти уровни энергии частицы массы  $m$  в гравитационном поле с  $U(x) = mgx$ .

**7.4** Записать стационарное уравнение Шредингера в импульсном представлении и решить его для свободной частицы.



## Семинар №8. Одномерные потенциалы

- 8.1** Частица массы  $m$  находится в основном состоянии одномерной прямоугольной потенциальной ямы ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками. Найти вероятность обнаружить частицу в области  $a/4 \leq x \leq 2a/3$ .
- 8.2** В прямоугольной потенциальной яме ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками разность между вторым и третьим энергетическими уровнями, на которых может находиться частица, составляет величину  $\Delta E$ . Найти массу  $m$  частицы.
- 8.3** Для частицы массы  $m$ , движущейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками, записать в энергетическом представлении операторы координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}$ .
- 8.4** Частица массы  $m$  находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме размерами  $a \times b$  с бесконечно высокими стенками. Найти уровни энергии частицы в такой яме.
- 8.5** Расстояние между стенками одномерной прямоугольной потенциальной ямы бесконечной высоты меняется по закону:  $x = a + vt$ . Как будет меняться расстояние между энергетическими уровнями частицы в яме? Обсудить предел перехода от дискретного к непрерывному спектру.
- 8.6** Частица массы  $m$  находится в одномерной потенциальной яме ширины  $a$  (так, что  $0 < x < a$ ) с бесконечно высокими стенками. Волновая функция частицы в координатном представлении имеет вид:

$$\psi(x) = 2 \sqrt{\frac{2}{5a}} \left( \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Найти среднее значение энергии частицы в рассматриваемом состоянии.

**8.7** Найти вероятность обнаружения частицы массы  $m$  в области  $x > a$  для потенциальной ямы из задачи **7.1 а**, если в этой яме имеется всего один дискретный уровень энергии с  $E = U_0/2$ .

**8.8** Из коммутационного соотношения для операторов координаты и импульса доказать коммутационное соотношение

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = \hat{1}$$

для операторов уничтожения и рождения одномерного гармонического осциллятора.

**8.9** Пользуясь результатами задачи **8.8** докажите, что:  $[\hat{N}, \hat{c}] = -\hat{c}$  и  $[\hat{N}, \hat{c}^\dagger] = \hat{c}^\dagger$ , где  $\hat{N} = \hat{c}^\dagger \hat{c}$  – оператор числа частиц.

**8.10** Для одномерного гармонического осциллятора в представлении чисел заполнения вычислить:

**а)**  $\langle 1 | \hat{Q}^2 | 1 \rangle$ .

**б)**  $\langle 5 | \hat{P}^2 | 5 \rangle$ .

**в)**  $\langle m | \hat{P} | m \rangle$  и  $\langle m | \hat{P}^3 | m \rangle$ . Обобщить полученный результат на случай  $\langle m | \hat{P}^n | m \rangle$

**г)**  $\langle 2 | \hat{P} | 3 \rangle$ .

**8.11** Покажите, что ядро оператора Гамильтона  $\hat{H}$  одномерного гармонического осциллятора в координатном представлении имеет вид

$$\langle Q | \hat{H} | \tilde{Q} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left( -\frac{d^2}{dQ^2} + Q^2 \right) \delta(Q - \tilde{Q}).$$

**8.12** В координатном, импульсном и энергетическом представлениях вычислить матричные элементы задачи **8.10**.

**8.13<sup>◇</sup>** Доказать “правило сумм” для частицы в одномерной потенциальной яме произвольной формы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (E_n - E_0) |\langle n | \hat{x} | 0 \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}.$$

### Семинар №9. Полный момент. Сложение моментов

**9.1** Найти явный вид матриц операторов  $\hat{J}_{x,y,z}$ ,  $\hat{J}^2$  и  $\hat{J}_{\pm}$  для квантовых систем с полным моментом **а)**  $j = 1/2$ ; **б)**\*  $j = 1$ ; **в)**  $j = 3/2$  в базисе  $|j, m\rangle$ .

**9.2** Показать, что если вектор  $|\psi\rangle$  является собственным вектором оператора  $\hat{J}_z$ , то в этом случае  $\langle \hat{J}_x \rangle_{\psi} = \langle \hat{J}_y \rangle_{\psi} = 0$ .

**9.3** Показать, что для спина  $s = 1/2$  спиноры, отвечающие проекциям спина  $\pm 1/2$  на ось  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , имеют вид:

$$\chi_{+}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \chi_{-}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

соответственно.

**9.4** Какова вероятность найти проекцию спина частицы  $+1/2$  на ось  $z$  в состоянии, когда проекция спина частицы на ось  $\vec{n}$  (определение см. в задаче **9.3**) равна  $-1/2$ ?

**9.5** Какова вероятность найти проекцию спина частицы  $+1/2$  на ось  $\vec{n}$  (определение см. в задаче **9.3**) в состоянии, когда проекция спина частицы на ось  $z$  точно равна  $+1/2$ ?

**9.6** Состояние частицы в центрально-симметричном поле характеризуется вектором состояния  $|l, m\rangle = |1, 0\rangle$ . Найти вероятность того, что проекция углового момента частицы на направление  $\vec{n}$ , составляющее с осью

$z$  угол  $\theta$ , окажется равной **а)**  $-1$ , **б)**  $0$ , **в)**  $+1$ . Кроме того, **г)** вычислить средние значения  $\langle (\vec{l} \vec{n}) \rangle$  и  $\langle (\vec{l} \vec{n})^2 \rangle$ .

**9.7** Показать, что компоненты орбитального момента  $\hat{L}_i$  и  $\hat{L}^2$  коммутируют с оператором  $\hat{P}$  отражения относительно начала координат.

**9.8** Доказать, что **а)**  $\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z$ ; **б)**  $[\hat{J}_z, \hat{J}_-] = -\hat{J}_+$ .

**9.9** При помощи техники повышающих и понижающих операторов найти все возможные состояния, получающиеся при сложении моментов

**а)** \*  $j_1 = 1/2$  и  $j_2 = 1$ ; **б)**  $j_1 = 1$  и  $j_2 = 1$ .

## Семинар N10. Движение в поле центральных сил. Атом водорода и водородоподобные ионы. Щелочные металлы

**10.1** Показать, что в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$

**а)** квадрат оператора углового момента имеет вид:

$$\hat{L}^2 = -\Delta_{\theta\varphi} = -\left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right);$$

**б)** оператор проекции углового момента на ось  $x$  задается формулой:

$$\hat{L}_x = i \left( \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right);$$

**в)** оператор проекции углового момента на ось  $z$  есть  $\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial\varphi}$ .

**10.2** Прямым вычислением в координатном представлении в сферической системе координат показать, что для гамильтониана  $\hat{H}$  частицы в центрально-симметричном поле  $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$  и  $[\hat{L}^2, \hat{H}] = 0$ .

**10.3** Найти уровни энергии и волновые функции частицы в трехмерном потенциальном ящике

$$U(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq a \\ +\infty, & \text{если } r > a \end{cases}.$$

**10.4** Найти энергетический спектр трехмерного гармонического осциллятора с потенциалом

$$U(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

**а)** в декартовых координатах;

**б)** в сферических координатах.

Сравнить порядок следования уровней энергии в этой задаче и в задаче

**10.3.**

**10.5** Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией:

**а)** 
$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{10}}\psi_{210}(r, \theta, \phi) + \frac{3}{\sqrt{10}}\psi_{21-1}(r, \theta, \phi);$$

**б)** 
$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_{100}(r, \theta, \phi) + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_{421}(r, \theta, \phi);$$

**в)** 
$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{310}(r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{21-1}(r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{54-3}(r, \theta, \phi);$$

**г)** 
$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\psi_{200}(r, \theta, \phi) + \frac{1}{2}\psi_{311}(r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{32-1}(r, \theta, \phi).$$

Найти в этом состоянии среднее значение  $\langle L_z \rangle_\psi$  проекции орбитального момента на ось  $z$ , среднее значение  $\langle \vec{L}^2 \rangle_\psi$  квадрата орбитального момента, среднее значение  $\langle E \rangle_\psi$  полной энергии электрона и среднее значение  $\langle W \rangle_\psi$  кинетической энергии электрона.

**10.6** Для решения задач атомной физики удобно ввести безразмерный вектор  $\vec{L}$  такой, что  $|\vec{L}|^2 = \ell(\ell + 1)$ . Найти все возможные волновые функции и энергии электрона, отвечающие:

**а)** ненулевой проекции орбитального момента электрона на ось  $z$ , если  $n = 2$  и  $|\vec{L}| = \sqrt{2}$ ;

- б) максимальной проекции орбитального момента электрона на ось  $z$ , если  $n = 2$  и  $|\vec{L}| = \sqrt{2}$ ;
- в) минимальной проекции орбитального момента электрона на ось  $z$ , если  $n = 2$  и  $|\vec{L}| = \sqrt{2}$ ;
- г) максимальной проекции орбитального момента электрона на ось  $z$ , если  $n = 3$  и  $|\vec{L}| = \sqrt{6}$ ;
- д) минимальной проекции орбитального момента электрона на ось  $z$ , если  $n = 3$  и  $|\vec{L}| = \sqrt{2}$ .

**10.7 а)** Максимальное значение проекции на ось  $z$  орбитального момента электрона в атоме водорода  $m_{\max} = 3$ . Найти минимальное значение энергии электрона  $E_{\min}$  в этом состоянии.

б) Минимальное значение проекции на ось  $z$  орбитального момента электрона в однократно ионизированном атоме гелия  $m_{\min} = -2$ . Найти минимальное значение энергии электрона  $E_{\min}$  в этом состоянии.

в) В атоме водорода электрон находится в состоянии с орбитальным моментом  $\ell = 2$ . Найти минимальное значение энергии электрона  $E_{\min}$  в этом состоянии.

г) В ионе лития  $Li^{++}$  электрон находится в состоянии с орбитальным моментом  $\ell = 3$ . Найти минимальное значение энергии электрона  $E_{\min}$  в этом состоянии.

**10.8 а)** В однократно ионизированном атоме гелия  $He^+$  электрон имеет энергию  $E = -\frac{Ry}{4}$ . При каком максимальном значении орбитального момента  $\ell_{\max}$  электрона это возможно?

б) В ионе лития  $Li^{++}$  электрон имеет энергию  $E = -Ry$ . При каком максимальном значении орбитального момента  $\ell_{\max}$  электрона это возможно?

**10.9** Электрон находится в  $1s$ -состоянии атома водорода. Найти в этом состоянии среднее значение радиуса орбиты электрона  $\langle r \rangle_{1s}$ ;

квадрат среднего значения  $\langle r^2 \rangle_{1s}$ ; дисперсию  $D = \langle r^2 \rangle_{1s} - \langle r \rangle_{1s}^2$ ; среднее значение произвольной степени радиуса орбиты  $\langle r^n \rangle_{1s}$ ; наиболее вероятное расстояние от центра ядра атома водорода, на котором можно найти электрон,  $r_{н.в.}$ ; средние значения кинетической  $\langle T \rangle_{1s}$  и потенциальной  $\langle U \rangle_{1s}$  энергий электрона.

Получить аналогичные результаты для  $2s$  и  $2p$ -состояний.

**10.10** Позитроний представляет собой связанное состояние электрона  $e^-$  и позитрона  $e^+$ .

а) Получить энергетический спектр и координатные волновые функции позитрония.

б) Найти потенциал ионизации позитрония в эВ.

в) Оценить значение напряженности электрического поля, при котором позитроний быстро ионизируется.

г) Для позитрония решить задачу **10.6**.

д) Вычислить вероятность того, что расстояние между электроном и позитроном будет больше (меньше)  $r_{н.в.}$ .

**10.11** Для электрона, движущегося в центрально-симметричном поле с гамильтонианом  $\hat{H}$ , показать, что  $[\hat{J}_z, \hat{H}] = 0$  и  $[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0$ , где  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  – полный момент электрона.

## Семинар N11. Нестационарное уравнение Шредингера

**11.1** Для свободной частицы, находящейся в момент времени  $t = t_0$  в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2a^2}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_0 x\right)$$

найти зависимость от времени средних значений и дисперсий координаты и импульса:

а) используя представление Гейзенберга;

б) используя представление Шредингера.

Записать волновую функцию в момент времени  $t$ .

**11.2** Частица находится в потенциальной яме в момент времени  $t_0 = 0$  в состоянии с волновой функцией  $\psi(x, 0) = 0,8\psi_1(x) + 0,6\psi_2(x)$ , где  $\psi_1, \psi_2$  – собственные функции оператора  $\hat{H}$ , соответствующие собственным значениям  $E_1, E_2$ . Найти волновую функцию системы в момент времени  $t$ .

**11.3** Найти средние значения и дисперсии координаты, импульса и энергии линейного гармонического осциллятора в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  система находилась в следующей суперпозиции:  $\psi(x, t = 0) = 1/\sqrt{2} (|n\rangle + i|n + 2\rangle)$ .

**11.4 $\diamond$**  Определить среднее значение и дисперсию координаты линейного гармонического осциллятора в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  система находилась в следующей суперпозиции (через  $\mathbb{C}^1$  обозначено поле комплексных чисел):

$$\psi(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{zz^*}{2}\right) \sum_{b=0}^{\infty} \frac{z^b}{\sqrt{b!}} |b\rangle, \quad z \in \mathbb{C}^1.$$

**11.5** Найти операторы координаты и импульса линейного гармонического осциллятора в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия.

**11.6** Найти среднее значение скорости линейного гармонического осциллятора в момент времени  $t$ , если в начальный момент он находился в состоянии:  $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ .

**Указание:** Воспользоваться теоремой Эренфеста.



**11.7** Являются ли наблюдаемые:

а)  $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ ;

б)  $\hat{X} = m_1 \hat{r}_1 + m_2 \hat{r}_2$ ;

в)  $\hat{K} = m_1 \hat{r}_1 + m_2 \hat{r}_2 - t (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$

интегралами движения для замкнутой системы двух частиц с потенциалом взаимодействия  $U(\hat{r}_1 - \hat{r}_2)$ ?

**11.8** Найти коэффициенты отражения и прохождения через  $\delta$ -образный барьер:  $U(x) = V_0 \delta(x)$ .

**11.9** Найти коэффициенты отражения и прохождения для частицы массы  $m$  с энергией  $E > 0$ , пролетающей над потенциальной ямой глубиной  $U_0$  и имеющей границы в координатах  $0$  и  $a$ . При каких энергиях налетающей частицы не будет происходить отражения?

**11.10** Найти коэффициенты отражения и прохождения частицей с энергией  $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  потенциального барьера

$$U(x) = \frac{\hbar^2 \pi}{ma^2} \left[ \frac{5\pi}{2} \theta(x) \theta(a-x) - a\delta(x) \right],$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда, определенная следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}.$$

**11.11** Найти вероятность вылета  $\alpha$ -частицы с энергией  $E_\alpha$  из ядра с зарядом  $Z$  и радиусом  $R_N$ . Потенциал взаимодействия  $\alpha$ -частицы с ядром-остатком (его заряд  $Z' = Z - 2$ ), изображенный на рисунке 11.1, при  $r \leq R_N$  можно рассматривать как потенциальную яму, обусловленную

отрицательным ядерным потенциалом приближения; при  $r > R_N$  – как кулоновский потенциал:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{при } r \leq R_N \\ \frac{2(Z-2)e^2}{r} & \text{при } r > R_N \end{cases} .$$

Оценить период полураспада.

**Примечание:** Впервые данная задача была решена тогда еще советским (а позже – известным американским) физиком Г.А. Гамовым в 1928 году на основе более общей работы двух других известных советских физиков Л.И. Мандельштама и Л.А. Леонтовича о прохождении квантовых частиц через потенциальный барьер.

Вероятность  $\alpha$ -распада складывается из вероятности образования  $\alpha$ -частицы в ядре и вероятности ее вылета. Основной вклад даёт вторая из вероятностей, в то время, как вероятность образования частицы порядка единицы. Вероятность  $\alpha$ -частицы, находящейся в ядре, в единицу времени покинуть ядро:  $w = \nu P$ , где  $P$  – вероятность протуннелировать сквозь барьер,  $\nu = v/2R$  – количество событий в единицу времени, когда частица оказывалась у поверхности ядра,  $v_\alpha$  – скорость  $\alpha$ -частицы. Период полураспада по определению равен:  $t_{1/2} = \ln 2/W$ , где  $W$  – вероятность распада.

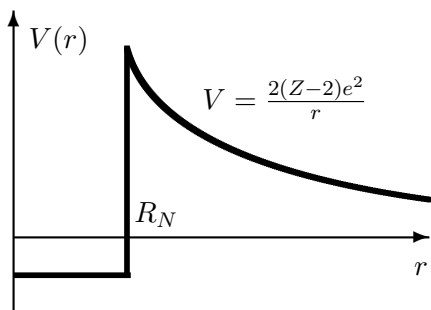


Рисунок 11.1. Потенциал взаимодействия  $\alpha$ -частицы с ядром-остатком.

- 11.12** Свободная частица находилась в момент времени  $t = 0$  в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_0 x\right)$$

Найти зависимость от времени средней координаты, если в момент времени  $t = 0$  было включено взаимодействие  $V = eEx$ . Считать, что поле  $E$  не зависит от времени.

**Указание:** воспользоваться представлением взаимодействия.

- 11.13** Показать, что в представлении Гейзенберга вектора состояния и операторы удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial |\psi^{(H)}(t_0)\rangle}{\partial t} = 0 \\ i\hbar \frac{\partial \hat{A}^{(H)}(t)}{\partial t} = [A^{(H)}(t), \hat{H}(t)] \end{cases} .$$

- 11.14** Показать, что в представлении взаимодействия вектора состояния и операторы удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial |\psi^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle \\ i\hbar \frac{\partial \hat{A}^{(I)}(t)}{\partial t} = [A^{(I)}(t), \hat{H}_0(t)] \end{cases} .$$

- 11.15** Показать, что если  $\hat{A}^{(S)}$ ,  $\hat{A}^{(H)}$  и  $\hat{A}^{(I)}$  – операторы одной и той же наблюдаемой в представлении Шредингера, представлении Гейзенберга и в представлении взаимодействия соответственно, то собственные значения этих операторов совпадают. Как этот факт можно объяснить с физической, а не с математической точки зрения?

- 11.16** Доказать, что коммутационные соотношения в шредингеровском и гейзенберговском представлениях имеют один и тот же вид. Изменится ли вид коммутаторов в представлении взаимодействия?

## Семинар N12. Матрица плотности

Данный семинар является факультативным. Поэтому все задачи семинара помечены значком “ $\diamond$ ”, хотя многие из них чрезвычайно просты. Цель семинара: познакомить студентов с концепцией матрицы плотности, которая является более общим способом описания состояния квантовой системы, чем дираковский формализм бра- и кет-векторов. Семинар построен так, что его проведение не нуждается в лекционном материале. Все необходимые теоретические сведения даются в виде задач.

**12.1 $\diamond$**  Чистыми состояниями в квантовой механике называются состояния микросистемы, полностью описываемые вектором состояния  $|\psi\rangle$ . Альтернативным образом чистые состояния можно задавать при помощи *статистического оператора* или *матрицы плотности*  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , которая является ничем иным, как проектором  $\hat{P}_\psi$  на данное состояние. Доказать, что матрица плотности чистого состояния удовлетворяет следующим условиям:

- а)** эрмитовость, то есть:  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ ;
- б)** в любом базисе  $\{|n\rangle\}$  диагональные элементы  $\rho_{nn}$  матрицы плотности  $\hat{\rho}$  неотрицательны; кроме того, легко показать, что диагональные элементы матрицы плотности определяют вероятности  $w_n$  детектирования того или иного базисного состояния  $|n\rangle$  в состоянии  $|\psi\rangle$ ;
- в)** в любом базисе  $\{|n\rangle\}$  след  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ ;
- г)**  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ , что автоматически приводит к равенству  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1$ ;
- д)** среднее значение любой наблюдаемой  $A$  задается выражением  $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$ .

**12.2**<sup>◇</sup> Напишите матрицу плотности, соответствующую вектору состояния из задачи **5.4**. Прямыми вычислениями проверьте, что для такой матрицы плотности выполняются все свойства матрицы плотности чистого состояния из задачи **12.1**.

**12.3**<sup>◇</sup> Построить матрицы плотности для частицы со спином  $s = 1/2$ , обладающей проекциями спина  $\pm 1/2$  на направление, задаваемое вектором  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ .

**12.4**<sup>◇</sup> Часто в квантовой физике возникает ситуация, когда мы знаем, что микросистема с вероятностью  $W_1$  находится в чистом состоянии  $|\psi_1\rangle$ , с вероятностью  $W_2$  – в чистом состоянии  $|\psi_2\rangle$  и так далее. Но при этом не существует чистого состояния  $|\psi\rangle$ , которым можно описать данную микросистему. Состояний  $|\psi_i\rangle$  может быть конечное или бесконечное число. Вектора  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  не обязательно образуют базис и даже могут быть неортогональными друг другу. Описанная выше ситуация встречается, когда ансамбль микросистем готовится или/и измеряется неидеальным макроприбором. В этом случае описание при помощи вектора состояния  $|\psi\rangle$  не представляется возможным. Но матрица плотности микросистемы легко строится:

$$\hat{\rho} = W_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + W_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \dots = \sum_{\ell} W_{\ell} |\psi_{\ell}\rangle \langle \psi_{\ell}|.$$

Пример принципиально другой ситуации, в которой микросистему тоже возможно описать только при помощи матрицы плотности, будет разобран в задаче **12.21**.

Не надо путать вероятности  $W_{\ell}$  с вероятностями  $w_n$  разложения матрицы плотности по базису  $\{|n\rangle\}$ , которые были введены в задаче **12.1**. Эти вероятности могут как совпадать, так и различаться.

Состояния, описываемые матрицей плотности  $\hat{\rho}$  указанного выше вида,

называются *смешанными состояниями*. Доказать, что матрица плотности смешанного состояния удовлетворяет следующим условиям:

- а)  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$  – эрмитовость;
- б) диагональные элементы матрицы плотности  $\hat{\rho}$  неотрицательны;
- в) в любом базисе  $\{|n\rangle\}$  след  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ ;
- г) в любом базисе  $\{|n\rangle\}$  след  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$ ; равенство достигается только для чистых состояний;
- д) среднее значение любой наблюдаемой  $A$  задается выражением  $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$ ;
- е) условие нормировки вероятностей:  $\sum_\ell W_\ell = 1$ .

Очевидно, что в реальных опытах из-за неидеальности экспериментальных установок все квантовые состояния должны быть смешанными. Чистые состояния – это удобное приближение, которое существенно упрощает вычисления. С математической точки зрения основное отличие смешанных состояний от чистых содержится в пункте г.

**12.5<sup>◇</sup>** Рассмотрим квантовую систему со спином  $S = 1$  в базисе

$$|S = 1, S_z = +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |S = 1, S_z = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|S = 1, S_z = -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

состояние которой задано матрицей плотности:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- а) Проверить, что такая матрица  $\hat{\rho}$  действительно удовлетворяет всем свойствам матрицы плотности.
- б) Чистым или смешанным является данное состояние?
- в) Найти собственные вектора и собственные значения матрицы  $\hat{\rho}$ .
- г) Записать  $\hat{\rho}$  в базисе собственных векторов.

**12.6 $\diamond$**  Пусть спиновое состояние частицы описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$  из задачи **12.5**. Найти в этом состоянии  $\langle S_x \rangle_\rho$ ,  $\langle S_y \rangle_\rho$  и  $\langle S_z \rangle_\rho$ .

**12.7 $\diamond$**  В спиновом базисе задачи **12.5** написана матрица

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Является или нет эта матрица матрицей плотности какой-либо квантовой системы? Если является, то система находится в чистом или смешанном состоянии?

- 12.8 $\diamond$**  Модифицируйте матрицу плотности  $\hat{\rho}$  задачи **12.5** так, чтобы частица
- а) оказалась поляризована вдоль оси  $z$ ;
  - б) оказалась поляризована в плоскости  $(x, y)$ .

**12.9 $\diamond$**  Показать, что спиновая матрица плотности нерелятивистского электрона в самом общем виде может быть записана как:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + (\vec{p}\vec{\sigma})),$$

где где  $\vec{p}$  называется *вектором поляризации* электрона. Какой физический смысл имеет вектор поляризации?

**12.10 $\diamond$**  В явном виде написать компоненты матрицы  $\hat{\rho}$  задачи **12.9**.

**12.11**◊ Проверить, что вектор поляризации  $\vec{p}$  задачи **12.9** удовлетворяет условию  $|\vec{p}|^2 \leq 1$ .

**12.12**◊ Найдите унитарное преобразование, которое диагонализует матрицу плотности задачи **12.9**.

**12.13**◊ Для некоторого состояния спиновая матрица плотности нерелятивистского электрона имеет вид:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Найти компоненты вектора поляризации  $\vec{p}$ . Чистому или смешанному состоянию отвечает данная матрица плотности?

**12.14**◊ Показать, что для спиновых состояний задачи **12.3** матрицы плотности будут иметь вид:

$$\hat{\rho}_{\pm}(\vec{n}) = \frac{1}{2} (\hat{1} \pm \vec{n} \vec{\sigma}),$$

где  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ .

**12.15**◊ В спиновом базисе  $|s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$  операторы наблюдаемых величин  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix},$$

а их средние для некоторого состояния равны:

$$\langle A \rangle_{\rho} = 2; \quad \langle B \rangle_{\rho} = \frac{1}{2}; \quad \langle C \rangle_{\rho} = 0.$$

Найти вектор поляризации и матрицу плотности для этого состояния. Чистым или смешанным является полученное состояние?



- 12.16**◊ Рассмотрим состояние  $|\psi\rangle = C_1|\psi_1\rangle + C_2|\psi_2\rangle$ . Как связаны между собой матрицы плотности  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$  и  $\hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$  при условии, что состояния  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$  ортогональны друг другу?
- 12.17**◊ Пусть состояние микросистемы описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . Найти вероятность того, что значение наблюдаемой  $A$  (которая обладает только непрерывным спектром) лежит в интервале  $\left[ a_0 - \frac{\Delta_a}{2}, a_0 + \frac{\Delta_a}{2} \right]$ . Предполагается, что  $\Delta_a \geq 0$ .
- 12.18**◊ Пусть состояние микросистемы описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . Найти вероятность того, что значение наблюдаемой  $A$  (которая обладает только непрерывным спектром) лежит в интервале  $\left[ a_0 - \frac{\Delta_a}{2}, a_0 + \frac{\Delta_a}{2} \right]$ , а значение наблюдаемой  $B$  (также обладающей только непрерывным спектром) лежит в интервале  $\left[ b_0 - \frac{\Delta_b}{2}, b_0 + \frac{\Delta_b}{2} \right]$ . Предполагается, что наблюдаемые  $A$  и  $B$  одновременно измеримы,  $\Delta_a \geq 0$  и  $\Delta_b \geq 0$ .
- 12.19**◊ Пусть в квантовой системе, которая описывается при помощи матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , имеются две одновременно измеримые наблюдаемые  $A$  и  $B$ , каждая из которых обладает непрерывным спектром. Найти  $\langle B \rangle_\rho$  при условии, что значение наблюдаемой  $A$  лежит в интервале  $\left[ a_0 - \frac{\Delta_a}{2}, a_0 + \frac{\Delta_a}{2} \right]$  и  $\Delta_a \geq 0$ .
- 12.20**◊ Пусть некоторая квантовая система описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$  и состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Показать, что матрица плотности  $\hat{\rho}_A$  системы  $A$  может быть найдена по формуле

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho},$$

где  $\text{Tr}_B$  означает след по квантовым числам, характеризующим подсистему  $B$ .

**12.21**◊ Две частицы, каждая со спином  $s = 1/2$ , находятся в состоянии с суммарным спином  $S = 0$ . В чистом или смешанном состоянии находится каждая из частиц?

**12.22**◊ Пусть состояние некоторой одномерной квантовой системы задано матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . Доказать, что в этом случае справедливо следующее соотношение неопределенности:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{4\hbar}{9} \text{Tr} \hat{\rho}^2,$$

где дисперсия  $\Delta A$  операторов координаты и импульса  $\hat{A} = \{\hat{x}, \hat{p}\}$  определена по формуле  $\Delta A = \sqrt{\left\langle \left( \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\rho \right)^2 \right\rangle_\rho}$  и  $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A})$ .

**12.23**◊ Сколько свободных параметров должна содержать матрица плотности произвольного спина  $s$ ?

**12.24**◊ Пусть квантовая система описывается явно независимым от времени эрмитовым гамильтонианом  $\hat{H}$ . Доказать, что в этом случае в представлении Шредингера ( $S$ ) квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана или уравнение эволюции) для матрицы плотности  $\hat{\rho}(t)$  имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}(t)}{\partial t} = \left[ \hat{H}^{(S)}, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right]$$

как для чистого, так и для смешанного состояний.

**12.25**◊ Написать квантовое уравнение Лиувилля для матрицы плотности свободной частицы массы  $m_0$  в импульсном представлении и получить решение данного уравнения в случае бесспиновой частицы.

**12.26**◊ Какой вид имеют уравнения эволюции для матрицы плотности в представлении Гайзенберга ( $H$ ) и в представлении взаимодействия ( $I$ )?

**12.27**◊ Пусть некоторая квантовая система, состоящая из двух подсистем  $A$  и  $B$ , описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB},$$

где  $\hat{H}_A$  – гамильтониан подсистемы  $A$ ,  $\hat{H}_B$  – гамильтониан подсистемы  $B$  и  $\hat{V}_{AB}$  – гамильтониан взаимодействия. Известно, что матрица плотности системы удовлетворяет начальному условию:  $\hat{\rho}(t = t_0) = \hat{\rho}_0$  и операторы  $\hat{H}_A$ ,  $\hat{H}_B$ ,  $\hat{V}_{AB}$  в представлении Шредингера явно от времени не зависят.

**а)** Описать эволюцию матрицы плотности во времени, если в качестве невозмущенного гамильтониана выбрать гамильтониан  $\hat{H}_A$ ;

**б)** Пусть  $F_B$  – наблюдаемая, характеризующая ТОЛЬКО подсистему  $B$ ,  $f_{B_i}$  – ее спектр (для простоты - дискретный и невырожденный). Какова вероятность обнаружить значение  $f_{B_{k'}}$  в рассматриваемой квантовой системе в момент времени  $t_2$ , если в момент времени  $t_1 \leq t_2$  было измерено значение  $f_{B_{n'}}$ ?

**12.28**◊ Пусть некоторая квантовая система, состоящая из двух подсистем  $A$  и  $B$ , описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB},$$

где  $\hat{H}_A$  – гамильтониан подсистемы  $A$ ,  $\hat{H}_B$  – гамильтониан подсистемы  $B$  и  $\hat{V}_{AB}$  – гамильтониан взаимодействия. Матрица плотности системы удовлетворяет начальному условию  $\hat{\rho}(t = t_0) = \hat{\rho}_0$ . Для упрощения задачи предположим, что операторы  $\hat{H}_A$ ,  $\hat{H}_B$  и  $\hat{V}_{AB}$  в представлении Шредингера явно от времени не зависят.

Пусть  $F_A$  – наблюдаемая, которая относится ТОЛЬКО к подсистеме  $A$ ,

а  $F_B$  – наблюдаемая, характеризующая ТОЛЬКО подсистему  $B$ . Спектры обеих наблюдаемых  $f_{A_i}$  и  $f_{B_j}$  для простоты положим дискретными и невырожденными. Какова вероятность обнаружить значение  $f_{B_{k'}}$  в рассматриваемой квантовой системе в момент времени  $t_2$ , если в момент времени  $t_1 \leq t_2$  было измерено значение  $f_{A_{n'}}$ ?

**12.29**◊ Для феноменологического описания распадов и открытых квантовых систем часто используют неэрмитов гамильтониан вида  $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$ , где операторы  $\hat{H}_0$  и  $\hat{\Gamma}$  эрмитовы. В представлении Шредингера написать:

- а) уравнение Шредингера для вектора состояния  $|\psi\rangle$ ;
- б) уравнение Шредингера для вектора состояния  $\langle\psi|$ ;
- в) уравнение эволюции для матрицы плотности  $\hat{\rho}$  смешанного состояния.

**12.30**◊ **Разложение Шмидта.** Пусть квантовая система находится в чистом состоянии  $|\psi\rangle$  и состоит из двух подсистем “ $A$ ” и “ $B$ ”. Тогда в подсистеме “ $A$ ” всегда можно выбрать базис  $\{|a_i\rangle\}$ , а в подсистеме “ $B$ ” базис  $\{|b_j\rangle\}$  такие, что состояние  $|\psi\rangle$  представимо в виде разложения:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell} \sqrt{W_{\ell}} |a_{\ell}\rangle |b_{\ell}\rangle, \quad \text{где} \quad \sum_{\ell} W_{\ell} = 1.$$

**12.31**◊ Пусть квантовая система находится в чистом состоянии  $|\psi\rangle$  и состоит из **трех** подсистем “ $A$ ”, “ $B$ ” и “ $C$ ”. Приведите пример, когда для такой системы разложение Шмидта построить невозможно.

## Семинар N13. Запутанные состояния

В последнее десятилетие запутанные состояния и связанные с ними эффекты стали играть важную роль не только при проверке оснований квантовой

теории, но и в практических приложениях квантовой механики, которые в скором времени могут существенно изменить окружающий нас мир (квантовые компьютеры, квантовая криптография, квантовая телепортация). Поэтому было признано целесообразным кратко ознакомить студентов с основными идеями физики запутанных состояний и квантовой теории информации.

**13.1 Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР).** Рассмотрим мысленный эксперимент, который был предложен Альбертом Эйнштейном, Борисом Подольским и Натаном Розеном в 1935 году для «доказательства» неполноты квантовой теории. Исторически этот мысленный эксперимент получил название «парадокса», хотя никакого реального парадокса в рассуждениях трех авторов не содержится.

Пусть в некоторой точке пространства в начальный момент времени покоящаяся нестабильная частица **A** (то есть импульс частицы  $\vec{p}_A = 0$ , но ее местоположение, согласно соотношению неопределенности Гейзенберга, не известно) распадается на две стабильные частицы **B** и **C**. Частицы **B** и **C** разлетаются на большое расстояние. Далее, измерим у частицы **B** импульс  $\vec{p}_B$ , а у частицы **C** координату  $\vec{x}_C$ . На первый взгляд, квантовая теория позволяет выполнить оба измерения со сколь угодно большой точностью. Если это действительно так, то после измерения импульса  $\vec{p}_B$  мы также знаем и импульс  $\vec{p}_C = -\vec{p}_B$  со сколь угодно большой точностью (поскольку, согласно закону сохранения импульса  $\vec{p}_A = \vec{p}_B + \vec{p}_C = 0$ ). Кроме того, из второго измерения мы точно знаем координату  $\vec{x}_C$  частицы **C**. Таким образом, для одной и той же частицы **C** мы можем **одновременно** сколь угодно точно измерить значение координаты и импульса, что нарушает принцип неопределенности Гейзенберга. По мнению Эйнштейна, Подольского и Розена данное рассуждение демонстрирует неприменимость квантовой механики к описанию коррелированных систем («неполноту квантовой механики» в терминах ЭПР). Найдите ошибку в рассуждении трех авторов.

**13.2 Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена в формулировке Д. Бом.** Приведенная в задаче 13.1 формулировка ЭПР-парадокса плохо приспособлена для экспериментальной проверки. В 1951 году Дэвид Бом предложил другой вариант парадокса, в котором запутанность возникает между проекциями спинов двух частиц. В настоящее время имеются многочисленные экспериментальные реализации подхода Д. Бом, которые подтверждают правоту квантовой механики.

Предположим, что имеются две частицы **A** и **B** со спинами  $\frac{1}{2}$  каждая, суммарный спин которых  $S$  в начальный момент времени равен нулю (экспериментально такое состояние приготовить не сложно; например, оно возникает в распаде  $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ ; пион имеет нулевой спин, следовательно, полный момент системы  $J_{e^+e^-} = J_{\pi^0} \equiv S_{\pi^0} = 0$ ; из анализа других сохраняющихся квантовых чисел распада можно показать, что орбитальный момент  $L_{e^+e^-} = 1$  запрещен; остается единственная возможность:  $L_{e^+e^-} = 0$  и полный спин  $e^+e^-$  – пары  $S_{e^+e^-} = 0$ ). Пусть затем частицы **A** и **B** разлетаются на большое расстояние. Часто говорят, что одну из частиц регистрируют в Париже, а другую – в Пекине. Измерим у частицы **A** проекцию ее спина на ось  $z$ , то есть величину  $S_z^{(A)}$ . Это можно сделать при помощи ориентированного соответствующим образом прибора Штерна-Герлаха. Одновременно у частицы **B** аналогичным образом измерим проекцию  $S_x^{(B)}$  ее спина на ось  $x$ . На первый взгляд, в таком измерении нет ничего невозможного. Поскольку суммарный спин частиц **A** и **B** равен нулю, то проекции спинов этих частиц на ось  $z$  (как и на любую другую ось!) подчиняются условию  $S_z^{(A)} + S_z^{(B)} = 0$ . Откуда сразу находим, что проекция спина частицы **B** на ось  $z$  равна  $S_z^{(B)} = -S_z^{(A)}$ . Таким образом, для частицы **B** мы одновременно со сколь угодно большой точностью можем узнать значения проекций спина на две непараллельные оси  $x$  и  $z$ . Но в квантовой механике операторы  $\hat{S}_x$  и  $\hat{S}_z$  не коммутируют между собой. Поэтому проекции спина  $S_x^{(B)}$  и  $S_z^{(B)}$  не могут быть одновременно измерены со

сколь угодно большой точностью, чтобы не противоречить соотношению неопределенности Гейзенберга. Найдите ошибку в рассуждении Д. Бома и защитите квантовую механику.

**13.3** Неделимой единицей классической информации является *бит*, принимающий одно из двух возможных значений  $\{0,1\}$ . Соответствующую единицу квантовой информации называют «квантовый бит» или сокращенно *кубит*. Минимальное нетривиальное гильбертово пространство, в котором можно реализовать описание кубитов, двумерно (объясните почему). Пусть  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  – ортогональный базис в таком гильбертовом пространстве. Покажите, что наиболее общее состояние кубита может быть представлено в виде  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , где  $a, b$  – комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Приведите примеры физической реализации кубитов в квантовых системах.

**13.4** Даны два кубита  $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$  и  $|\phi\rangle = \gamma|3\rangle + \delta|4\rangle$ . Запишите вектор состояния такой двухчастичной системы. В гильбертовом пространстве какой минимальной размерности реализуется данный вектор?

**13.5** Построить базис состояний Белла для двух фотонных кубитов (фотон является кубитом в поляризационном базисе). Чем хорош такой базис? Являются ли состояния Белла запутанными? Как измерить такие состояния экспериментально?

**13.6** В результате параметрического рассеяния света на кристалле с квадратичной нелинейностью родилась пара запутанных фотонов (их условно называют сигнальным  $s$  и холостым  $i$ ). После прохождения поляризаторов фотон  $s$  стал обладать только вертикальной поляризацией, а фотон  $i$  оказался равновероятно поляризован как в вертикальном, так

и в горизонтальном направлениях. Запишите вектор состояния такой двухчастичной системы.

**13.7 $\diamond$**  Покажите, что наиболее общая матрица плотности кубита имеет вид  $\rho(\vec{P}) = \frac{1}{2}(1 + \vec{P}\vec{\sigma})$ , где  $\vec{P}$  – трехкомпонентный вектор длины  $|\vec{P}| \leq 1$ . В чистом состоянии  $|\vec{P}| = 1$  (наиболее общая самосопряженная  $2 \times 2$  матрица зависит от четырех вещественных параметров и может быть разложена в базисе  $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ). Проследите связь между матрицей плотности кубита и матрицей плотности спина  $1/2$  (матрицей плотности электрона) в нерелятивистском случае.

**13.8 $\diamond$**  **Необходимое условие сепарабельности А.Переса.** Пусть имеется матрица плотности  $\hat{\rho}$  квантовой системы, состоящей из двух квантовых подсистем. Как узнать, находится ли эта система в запутанном состоянии или нет (во втором случае говорят, что квантовая система находится в *сепарабельном* состоянии)? Прежде всего, нужно выполнить частичное транспонирование матрицы плотности  $\rho$  в пространстве состояний одной (любой!) из подсистем. Если новая матрица  $\hat{\rho}$  удовлетворяет всем условиям, накладываемым на матрицу плотности в квантовой теории, то исходная квантовая система может быть сепарабельной. Если – не удовлетворяет, то матрица плотности  $\hat{\rho}$  гарантированно соответствует запутанной квантовой системе (А. Peres, Phys. Rev. Lett., **77**, p. 1413 (1996)).

Рассмотреть:

**а)** состояние Вернера, представляющее ансамбль  $x$  частей чистых синглетов частиц со спином  $\frac{1}{2}$  и  $(1 - x)$  частей других состояний Белла;

**б)** состояние Гизина, представляющее ансамбль  $x$  частей чистых состояний  $a|01\rangle + b|10\rangle$  (где  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ) и  $\frac{(1-x)}{2}$  частей чистых состояний  $|00\rangle$  и  $|11\rangle$ .

**13.9 $\diamond$**  **Редукционное условие сепарабельности.** Пусть микросистема состоит из двух подсистем “А” и “В”. Для того, чтобы состояние микроси-



стемы, которое описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , было бы сепарабельным необходима положительность матриц

$$\hat{\rho}_A \otimes \hat{1}^{(B)} - \hat{\rho}$$

и

$$\hat{1}^{(A)} \otimes \hat{\rho}_B - \hat{\rho},$$

где  $\hat{\rho}_A$  – матрица плотности подсистемы “A” и  $\hat{\rho}_B$  – матрица плотности подсистемы “B” (M.Horodecki and P.Horodecki, “Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols”, Phys. Rev. A 59, p.4206, 1999).

Примерить данный критерий сепарабельности к состоянию Вернера и состоянию Гизина. Сравнить полученный результат с тем, который дает критерий сепарабельности А.Переса.

- 13.10<sup>◇</sup>** Задача о невозможности создания «квантового телеграфа». Предположим, что два экспериментатора Алиса и Боб договорились и выбрали некоторую ось  $z$  в пространстве. Кроме того они решили, что если Алиса измерит проекцию спина  $S_z = +1/2$ , то это будет означать “1”. Если же  $S_z = -1/2$ , то это будет означать “0”. Затем Боб улетел к Проксиме Центавра (ближайшей от нашего Солнца звезде). На половине пути от Земли до Проксимы имеется источник коррелированных частиц, который рождает два фермиона с  $s = 1/2$  каждый, в состоянии с суммарным спином  $S = 0$ . Таким образом, когда один из фермионов от источника находится на Проксиме Центавра, второй достигает Земли. Пусть Боб хочет передать Алисе информацию об успешной высадке в систему Проксимы. Казалось бы, для этого ему лишь нужно сделать преобразование, которое переводит его фермион в состояние с определенной проекцией спина  $S_z^{(b)} = +1/2$  или  $S_z^{(b)} = -1/2$ . И таким образом в двоичном коде написать сообщение. Тогда Алиса на Земле **сразу** измерит проекции спинов своих частиц

$S_z^{(a)} = -S_z^{(b)}$  и прочтет сообщение Боба.

То есть, нами придумана схема, как передавать сообщения быстрее скорости света. Предположим, что технически источник коррелированных частиц и полет к Проксиме Центавра осуществить можно. Почему, тем не менее, сверхсветовой «квантовый телеграф» все-равно не будет работать?

- 13.11**<sup>◇</sup> Обобщением результата задачи **13.10** является **теорема Эберхарда**. Пусть имеется квантовая система, которая описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . И пусть эта система состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Тогда никакое измерение наблюдаемых, связанных только с подсистемой  $A$ , не влияет на результат измерения других наблюдаемых, которые связаны только с подсистемой  $B$ .

## **Семинар N14. Квантовая энтропия и квантовая информация**

Данный семинар, как и семинар, посвященный матрице плотности, является факультативным. Поэтому все задачи семинара помечены символом ”◇”. В настоящее время изучение свойств квантовой энтропии и квантовой информации являются бурно развивающимися разделами физики микромира. Поэтому мы посчитали возможным включить в пособие дополнительный набор задач по этим актуальным направлениям.

- 14.1**<sup>◇</sup> Энтропия квантовой системы (энтропия фон Неймана), состояние которой задается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , определяется формулой

$$S \equiv S(\hat{\rho}) = - \sum_i \rho_i \ln \rho_i,$$

где  $\rho_i$  – собственные значения матрицы плотности  $\hat{\rho}$ . Доказать, что энтропию фон Немана можно написать в виде:

$$S(\hat{\rho}) = - \langle \ln \hat{\rho} \rangle_{\rho} = - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}).$$

Заметим, что оператор  $\hat{S} = - \ln \hat{\rho}$  можно рассматривать как оператор энтропии квантовой системы.

**14.2**◊ Проверить, что для любой матрицы плотности  $\hat{\rho}$  энтропия фон Неймана  $S(\hat{\rho}) \geq 0$ . Равенство достигается для чистых состояний.

**14.3**◊ Доказать, что если размерность Гильбертова пространства равна  $d$ , то  $S(\hat{\rho}) \leq \ln d$ . Равенство достигается для состояний, описываемых матрицей плотности  $\hat{\rho} = \frac{1}{d} \hat{1}$  (равномерное распределение).

**14.4**◊ Показать, что для замкнутых квантовых систем энтропия сохраняется.

**14.5**◊ Квантовая система находится в чистом состоянии  $|\psi\rangle$ . Найти энтропию квантовой системы.

**14.6**◊ Пусть состояние микросистемы задается матрицей плотности задачи **12.5**. Найти энтропию этого состояния в битах и натах.

**14.7**◊ Найти энтропию состояния спина  $s = 1/2$ , которое описывается матрицей плотности задачи **12.9**.

**14.8**◊ Найти энтропию состояния Вернера (см. пункт **a**) задачи **13.8**.

**14.9**◊ Пусть имеются две микросистемы, которые описываются при помощи матриц плотности  $\hat{\rho}$  и  $\hat{\sigma}$ . Тогда квантовой относительной энтропией ( $\hat{\rho}$  относительно  $\hat{\sigma}$ ) называется величина:

$$S(\hat{\rho} || \hat{\sigma}) = \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}).$$

Доказать, что квантовая относительная энтропия неотрицательна (неравенство Клейна), то есть:

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq 0.$$

Равенство достигается при  $\hat{\sigma} = \hat{\rho}$ .

**14.10**<sup>◊</sup> Пусть матрицу плотности  $\hat{\rho}_{AB}$  квантовой системы можно записать в факторизованном виде:

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \hat{\rho}_B.$$

Доказать, что в этом случае энтропия квантовой системы равна

$$S(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B).$$

**14.11**<sup>◊</sup> Пусть квантовая система, состоящая из двух подсистем  $A$  и  $B$ , находится в **чистом состоянии**. Докажите, что в этом случае

$$S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B).$$

Таким образом, значение энтропии фон Неймана  $S(\hat{\rho}_A)$  или  $S(\hat{\rho}_B)$  можно использовать как характеристику запутанности состояния.

**14.12**<sup>◊</sup> Обобщим результат задачи **14.10**. Предположим, что некоторая квантовая система состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Докажите, что для матрицы плотности произвольного вида  $\hat{\rho}_{AB}$  такой системы выполняется неравенство (**свойство субаддитивности энтропии фон Неймана**)

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B).$$

Равенство достигается только в условиях задачи **14.10**.

Отметим интересный факт, следующий из решения задачи: в отличии

от классической энтропии Шеннона, энтропия фон Неймана квантовой системы как целого может быть меньше энтропии составляющих ее подсистем за счет корреляции между подсистемами.

- 14.13 $\diamond$**  Доказать, что если квантовая система состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ , то матрица плотности всей системы  $\hat{\rho}_{AB}$  и матрицы плотности ее подсистем  $\hat{\rho}_A$  и  $\hat{\rho}_B$  удовлетворяют неравенству треугольника (или неравенству Араки-Либа):

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \geq |S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_B)|,$$

то есть разность энтропий двух подсистем не может превышать энтропию всей квантовой системы

- 14.14 $\diamond$**  **Вогнутость энтропии.** Рассмотрим матрицу плотности  $\hat{\rho} = \sum_{\ell} W_{\ell} \hat{\rho}_{\ell}$  такую, что матрицы плотности  $\hat{\rho}_{\ell}$  сами являются матрицами плотности смешанных состояний. Докажите, что в этом случае верны следующие неравенства:

$$H(\hat{\rho}) + \sum_{\ell} W_{\ell} S(\hat{\rho}_{\ell}) \geq S\left(\sum_{\ell} W_{\ell} \hat{\rho}_{\ell}\right) \geq \sum_{\ell} W_{\ell} S(\hat{\rho}_{\ell}),$$

где  $H(\hat{\rho}) = -\sum_{\ell} W_{\ell} \ln W_{\ell}$  – классическая энтропия Шеннона. В каких случаях достигается равенство?

- 14.15 $\diamond$**  Доказать, что вогнутость энтропии фон Неймана является следствием ее субаддитивности.

- 14.16 $\diamond$**  Пусть квантовая система, описываемая матрицей плотности  $\hat{\rho}_{AB}$ , состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Условной энтропией  $S(\hat{\rho}_B|\hat{\rho}_A)$  называется величина:

$$S(\hat{\rho}_B|\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_{AB}) - S(\hat{\rho}_A).$$

Показать, что состояние подсистем  $A$  и  $B$  является запутанным, если  $S(\hat{\rho}_B|\hat{\rho}_A) \leq 0$  (**энтропийный критерий запутанности**).

**14.17**<sup>◇</sup> Показать, что согласно критерию запутанности задачи **14.16**, состояние Вернера является запутанным, если  $x < 1/\sqrt{3}$ . Сравнить данный результат с результатом задачи **13.8 а)** и задачи **13.9**.

**14.18**<sup>◇</sup> Пусть квантовая система, описываемая матрицей плотности  $\hat{\rho}_{AB}$ , состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Докажите, что состояние такой системы не является запутанным тогда и только тогда, когда матрицы плотности  $\hat{\rho}_A$  и  $\hat{\rho}_B$  описывают чистые состояния.

**14.19**<sup>◇</sup> **Теорема о невозможности клонирования смешанного состояния.** Пусть имеется квантовое состояние, которое описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . Показать, что тогда невозможно создать микросистему с матрицей плотности  $\hat{\rho}_{AB}$  в прямом произведении гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  такую, что  $\text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}$  и  $\text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}$ .

## **Семинар N15. Движение квантовых систем в магнитном поле. Уравнение Паули**

**15.1** Показать, что калибровочные преобразования для потенциалов электромагнитного поля

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(t, \vec{r}) \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{r}) \end{cases}$$

не изменяют значения векторов напряженности электрического и магнитного поля.  $f(t, \vec{r})$  – достаточно гладкая скалярная функция.

**15.2** Показать, что для уравнения Паули:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{r})}{\partial t} = \left[ \frac{\hat{1}}{2m_0} \left( -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + \hat{1} e \varphi(\vec{r}) - \frac{g_s \mu_s}{2} \vec{\mathcal{H}} \hat{s} \right] \psi(t, \vec{r})$$

калибровочные преобразования (см. задачу **15.1**) ведут к изменению волновой функции по закону

$$\psi(t, \vec{r}) \rightarrow \psi'(t, \vec{r}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f(r, \vec{r})\right) \psi(t, \vec{r}).$$

- 15.3<sup>◇</sup>** Найти коэффициенты отражения и прохождения потенциального барьера высоты  $U_0$  и ширины  $a$  для частицы со спином  $1/2$ .
- 15.4** Вычислить величину расщепления пучка электронов в опыте Штерна-Герлаха, если длина полюсов магнита  $L = 10$  см, градиент магнитного поля  $dH/dz = 2 \cdot 10^5$  Э/см, температура печи  $T = 10^3$  К. Экран расположен у края магнита.  
**Указание:** Определить скорость электронов, исходя из распределения Максвелла:  $f(V_z) = \text{const} \cdot \exp(-mV_z^2/2kT)$  и полагая, что плотность потока электронов ( $j_z = V_z f(V_z)$ ) в точке измерения максимальна.
- 15.5** Оценить величину градиента магнитного поля, в котором можно подвесить электрон так, чтобы сила, действующая со стороны поля, уравновешивала силу тяжести.
- 15.6** Решить задачу **15.5** для нейтрона и протона.
- 15.7** Для частицы со спином  $1/2$  в постоянном однородном магнитном поле найти коммутаторы  $[\hat{x}_0, \hat{H}]$ ,  $[\hat{y}_0, \hat{H}]$ ,  $[\hat{x}_0, \hat{y}_0]$  для операторов  $\hat{x}_0$ ,  $\hat{y}_0$ , соответствующих координатам центра окружности классического движения. Поле  $\mathcal{H}$  перпендикулярно плоскости  $(x, y)$ .

- 15.8** Показать, что для бесспиновой частицы в постоянном однородном магнитном поле, справедливо выражение

$$[\hat{P}_\alpha, \hat{P}_\beta] = i \frac{e\hbar}{c} \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathcal{H}_\gamma,$$

где  $\mathcal{H} = |\vec{\mathcal{H}}|$ ,  $\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}} - e/c \vec{A}$  – оператор обобщенного импульса.

- 15.9** Определить число различных состояний для частицы со спином  $s = 1/2$  во внешнем магнитном поле.
- 15.10** Найти зависимость спиновой функции покоящегося мюона (спин  $1/2$ ) от времени, если в начальный момент

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и включено магнитное поле  $\mathcal{H}$ , направленное вдоль оси  $x$ . Найти  $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ ,  $\langle \hat{\sigma}_y \rangle$ ,  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  и убедиться в том, что магнитный момент мюона совершает прецессию вокруг магнитного поля. Получить вид спиновых операторов в представлении Гейзенберга.

- 15.11** Электрон находится в магнитном поле

$$\vec{\mathcal{H}} = \{ \mathcal{H}_0 \sin \theta \cos \omega t; \mathcal{H}_0 \sin \theta \sin \omega t; \mathcal{H}_0 \cos \theta \}$$

и в начальный момент времени его спин ориентирован параллельно полю. Найти вероятность того, что в момент времени  $t$  спин окажется ориентирован против поля.

## Семинар N16. Неравенства Белла, Вигнера и Леггетта-Гарга

Данный семинар посвящен способам экспериментальной проверки оснований квантовой механики. Надеемся, что задачи этого раздела позволят студентам лучше понять квантовую парадигму, оценить глубину и красоту



квантовой физики. Поскольку семинар факультативный, то все задачи семинара помечены символом "◇" и не являются обязательными.

**16.1◇ Неравенство Вигнера.** Некоммутирующие операторы не обладают общей системой собственных векторов. В рамках квантовой теории это интерпретируется как невозможность одновременного измерения определенных значений любых двух проекций спина  $1/2$  на непараллельные оси никаким макроскопическим прибором.

Возникает вопрос: являются ли проекции спина на несколько непараллельных направлений *одновременно элементами физической реальности*, даже если их невозможно совместно измерить при помощи макроприборов? Или в микромире физическая реальность создается конкретной макроскопической измерительной аппаратурой, без явного указания возможностей которой вообще не имеет смысла говорить о характеристиках микрочастицы (**принцип дополнительности Н.Бора**)? Для ответа на эти вопросы необходимо понять, как на математическом языке можно записать высказывание "*некоторая совокупность наблюдаемых одновременно является элементом физической реальности*", даже если эта совокупность совместно не может быть измерена никаким известным макроприбором. Разумная возможность состоит в том, чтобы *совместная вероятность существования этой совокупности наблюдаемых была не отрицательна*.

Далее будем обозначать проекции спина  $s = 1/2$  для  $i$ -ой частицы на некоторую ось, заданную единичным вектором  $\vec{n}$ , через  $n_{\pm}^{(i)}$ . То есть запись  $n_{\pm}^{(i)}$  эквивалентна более привычной и более громоздкой записи  $s_{\vec{n}}^{(i)} = \pm \frac{1}{2}$ .

Теперь предположим, что проекции спинов обоих фермионов на три непараллельных направления  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  **одновременно** являются элементами физической реальности. Тогда, к примеру, можно говорить о неотрицательной вероятности  $w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, c_+^{(1)})$ . По правилу сложения ве-

роятностей независимых событий из вероятностей для проекций спинов двух фермионов на три направления легко получить вероятности проекций спинов фермионов только на два направления. Например,

$$w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}) = w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, c_+^{(1)}) + w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, c_-^{(1)}).$$

Аналогично можно расписать вероятности  $w(a_+^{(2)}, c_+^{(1)})$  и  $w(c_+^{(2)}, b_+^{(1)})$ . Показать, что в силу неотрицательности каждой из вероятностей любых совокупностей проекций спинов обоих фермионов на три непараллельных направления и условия антикорреляции по направлению  $\vec{c}$ , для трех указанных выше двойных вероятностей должно выполняться неравенство треугольника:

$$w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}) \leq w(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}) + w(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}).$$

Это неравенство называется **неравенством Вигнера** или **неравенством Белла в форме Вигнера**.

**16.2<sup>◇</sup>** Пусть все единичные вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  лежат в плоскости  $(xz)$ . Показать, что в рамках квантовой теории для двух полностью антикоррелированных спинов  $s = 1/2$  (см. задачу **13.2**) неравенство Вигнера принимает вид:

$$\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2},$$

где  $\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$ . Очевидно, что это неравенство выполняется не для всех возможных наборов значений углов  $\theta_{ab}$ ,  $\theta_{cb}$  и  $\theta_{ac}$ . Показать, что максимальное нарушение неравенства происходит при следующем выборе углов между осями:  $\theta_{ac} = \theta_{cb} = \pi/3$  и  $\theta_{ab} = 2\pi/3$ .

Это нарушение интерпретируется как доказательство того, что в квантовой механике нельзя говорить о свойствах микросистемы без указания макроскопического прибора, который производит измерение над микросистемой. И/или, что нерелятивистская квантовая механика яв-

ляется нелокальной теорией, поскольку в рамках ее формализма скорость передачи сигналов бесконечна. Поэтому измерение проекции спина фермиона “1” на некоторое направление **мгновенно** приводит к неопределенности проекции спина фермиона “2” на любое другое направление, непараллельное данному. В противном случае в экспериментах с коррелированными по спину фермионами можно было бы “обойти” соотношение неопределенностей Гейзенберга, которое является точным математическим следствием из оснований квантовой механики.

**16.3<sup>◇</sup> Неравенство Белла.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  – три дихотомные наблюдаемые (то есть наблюдаемые, которые могут принимать всего два значения  $\pm 1$ ). Предположим, что эти три наблюдаемые одновременно являются элементами физической реальности, то есть неотрицательны вероятности вида  $w(A_+, B_-, C_+)$  и аналогичные им. Докажите, что тогда для таких наблюдаемых выполнено неравенство:

$$|\langle AB \rangle - \langle AC \rangle| \leq 1 + \langle BC \rangle.$$

Это неравенство называется **неравенством Белла**.

**16.4<sup>◇</sup>** В квантовой механике в качестве дихотомных наблюдаемых задачи **16.3** выберем *удвоенные* проекции спинов  $s = 1/2$  на три непараллельные оси  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Тогда, например, оператор удвоенной проекции частицы “ $j$ ” на ось  $\vec{a}$  имеет вид  $\hat{A}^{(j)} = (\vec{a} \vec{\sigma}^{(j)})$ , где  $\vec{\sigma}^{(j)}$  – матрицы Паули, которые действуют на спиновые переменные частицы “ $j$ ”. Чтобы измерять средние значения от произведения таких наблюдаемых, необходимо использовать коррелированные по спину пары фермионов из задачи **13.2**. В этом случае неравенство Белла, очевидно, надо записать следующим образом:

$$\left| \langle \hat{A}^{(1)} \hat{B}^{(2)} \rangle - \langle \hat{A}^{(1)} \hat{C}^{(2)} \rangle \right| \leq 1 + \langle \hat{B}^{(1)} \hat{C}^{(2)} \rangle,$$

где усреднение ведется по волновой функции запутанного состояния. Проверить, что после усреднения данное неравенство Белла переходит в тригонометрическое неравенство

$$|\cos \theta_{ac} - \cos \theta_{ab}| \leq 1 - \cos \theta_{bc},$$

если вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  лежат плоскости  $(xz)$ . Показать, что максимальное нарушение этого неравенства достигается, когда  $\theta_{ab} = \theta_{bc} = \pi/3$ , и  $\theta_{ac} = 2\pi/3$ .

**16.5 $\diamond$**  **Неравенства Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта.** Пусть имеются четыре дихотомные переменные  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что если все они одновременно являются элементами физической реальности, то выполняется следующее неравенство

$$|\langle AB \rangle - \langle AD \rangle| + |\langle CB \rangle + \langle CD \rangle| \leq 2$$

или более слабое неравенство

$$|\langle AB \rangle - \langle AD \rangle + \langle CB \rangle + \langle CD \rangle| \leq 2.$$

Оба эти неравенства носят название **неравенств Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта (CHSH)**. Однако часто, но не вполне верно, именно эти неравенства называют неравенствами Белла или неравенствами **Белла-Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта**.

**16.6 $\diamond$**  Чтобы показать, что в квантовой механике неравенства Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта могут нарушаться, рассмотрим проекции спина  $s = 1/2$  на четыре непараллельные направления  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  для коррелированных по спину фермионных пар (обратите внимание на аналогию с задачей **16.4**). Написать явный вид CHSH-неравенств для дан-

ного случая и найти конфигурацию направлений  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ , при которой достигается максимальное нарушение CHSH-неравенств.

**16.7<sup>◊</sup>** Доказать, что **любое запутанное по спину состояние** вида

$$|\psi\rangle = C_1 \left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S_z^{(A)} = +\frac{1}{2} \right\rangle \left| S^{(B)} = \frac{1}{2}, S_z^{(B)} = -\frac{1}{2} \right\rangle + \\ + C_2 \left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S_z^{(A)} = -\frac{1}{2} \right\rangle \left| S^{(B)} = \frac{1}{2}, S_z^{(B)} = +\frac{1}{2} \right\rangle,$$

где  $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ , нарушает CHSH-неравенства.

**16.8<sup>◊</sup>** **Граница Цирельсона.** Рассмотрим эрмитовы операторы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  и  $\hat{D}$ , спектр каждого из которых состоит всего из двух значений “+1” и “-1”. Такие операторы соответствуют дихотомным наблюдаемым. Пусть дополнительно

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{D}] = [\hat{C}, \hat{B}] = [\hat{C}, \hat{D}] = 0,$$

но  $[\hat{A}, \hat{C}] \neq 0$  и  $[\hat{B}, \hat{D}] \neq 0$ . Докажите, что в этом случае справедливо неравенство:

$$|\langle AB \rangle - \langle AD \rangle + \langle CB \rangle + \langle CD \rangle| \leq 2\sqrt{2},$$

которое дает верхнюю границу корреляций, достижимую в рамках квантовой теории.

**16.9<sup>◊</sup>** **Неравенство Белла для частиц со спином единица.** Пусть частица со спином  $S = 0$  распадается на две частицы, каждая из которых имеет спин  $s^{(i)} = 1$ . Как и в задаче **16.1** будем обозначать проекции спина  $s = 1$  для  $i$ -ой частицы на некоторую ось, заданную единичным вектором  $\vec{n}$ , через  $n_{\pm, 0}^{(i)}$ . То есть, например, запись  $n_0^{(i)}$  эквивалентна более привычной и более громоздкой записи  $s_{\vec{n}}^{(i)} = 0$ .

Далее выберем четыре непараллельные направления  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ , которые лежат в одной плоскости. Докажите, что если проекции спинов обеих частиц на все четыре направления одновременно являются элементами физической реальности, то выполняется следующее неравенство:

$$w(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}) - w(a_+^{(2)}, d_+^{(1)}) + w(c_+^{(2)}, d_+^{(1)}) + w(c_0^{(2)}, b_0^{(1)}) + w(c_0^{(2)}, b_-^{(1)}) + w(c_-^{(2)}, b_0^{(1)}) + w(c_-^{(2)}, b_-^{(1)}) \leq 1.$$

При каких условиях данное неравенство нарушается в квантовой теории?

**16.10<sup>◇</sup> Неравенство Леггетта-Гарга.** Почему макроскопические тела не находятся в суперпозиции различных состояний? Квантовая механика объясняет этот факт при помощи явления декогеренции: когда при взаимодействии микрочастицы с макроприбором за счет большого ( $> 10^{20}$ ) числа степеней свободы макроприбора происходит экспоненциальное подавление недиагональных элементов матрицы плотности. Диагональные же элементы как раз и описывают смесь (но не суперпозицию!) макроскопически различных состояний.

Однако, в повседневной жизни физики часто пользуются «более простым и наглядным» объяснением, которое носит название концепции **макроскопического реализма** (Macrorealism per se). Именно, любой макроскопический объект может находиться в нескольких макроскопически различных состояниях. Причем, в каждый момент времени в каком-то одном из этих состояний. А проведенное в каждый момент времени измерение состояния макрообъекта никак не влияет на его последующую динамику (Non-invasive measurability).

Для того, чтобы убедиться, что принцип макроскопического реализма не совместим с представлениями квантовой физики, можно воспользоваться идеей, которая уже была реализована в задаче **16.5**. Пусть имеется некоторая зависящая от времени дихотомная переменная  $Q(t_i) \equiv$

$Q_i = \pm 1$ . Тогда можно определить временной коррелятор  $C_{ij} = \langle Q_i Q_j \rangle$ . Докажите, что если придерживаться концепции макроскопического реализма, то этот коррелятор всегда удовлетворяет неравенству:

$$|C_{12} + C_{23} + C_{34} - C_{14}| \leq 2.$$

Данное неравенство носит название **неравенства Леггетта-Гарга**.

**16.11**◊ Пусть частица со спином  $s = 1/2$  находится в магнитном поле, направленном вдоль оси  $x$ . Показать, что если при помощи мягких измерений можно узнать значение проекции спина частицы на ось  $z$  через равные промежутки времени  $\Delta t = \frac{\pi}{4\omega}$ , где  $\omega$  - ларморовская частота прецессии спина, то неравенство Леггетта-Гарга нарушается. Нарушение неравенства Леггетта-Гарга служит **экспериментальным доказательством** несовместимости принципа макроскопического реализма с постулатами квантовой теории.

**16.12**◊ Удовлетворяют ли в квантовом случае неравенства Леггетта-Гарга квантовой границе Цирельсона?

## Семинар N17. Теория возмущений — I

**17.1** В рамках стационарной теории возмущения найти поправки первого и второго порядков к уровням энергии и поправку первого порядка к векторам состояния линейного гармонического осциллятора для операторов возмущения вида:

**а)**  $\hat{V} = \alpha \hat{x}$ ; **б)**  $\hat{V} = \alpha \hat{x}^3 + \beta \hat{x}^4$ .

Указать условие применимости теории возмущений.

**17.2** Найти в первом порядке теории возмущений вероятность перехода под влиянием периодического возмущения вида:  $\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}$  при  $t \geq 0$ .

**17.3** Используя результат задачи **17.2**, получить и правильно проинтерпретировать соотношение неопределенности Бора-Гейзенберга.

**17.4** Найти вероятность перехода частицы массы  $m_0$ , находящейся в связанном состоянии  $\delta$ -образной ямы, в непрерывный спектр под влиянием периодического возмущения вида  $\hat{V}(t) = A x \cos(\omega t)$ , если  $\hbar\omega \gg (\hbar k_0)^2/2m_0$ , где  $k_0$  – параметр ямы.

**17.5** Найти вероятность перехода квантовой системы под действием возмущения вида:

**а)**

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} \hat{F}, & \text{если } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{если } t < 0 \text{ или } t > \tau \end{cases};$$

**б)**

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ \hat{F}, & \text{если } 0 \leq t \leq \tau; \\ F_0, & \text{если } t > \tau \end{cases}.$$

**17.6** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. Ядро атома испытывает внезапный толчок, в результате которого оно приобретает скорость  $v$ . Найти вероятность того, что электрон после этого останется в основном состоянии.

**17.7** Определить поправки первого приближения к собственному значению и правильные функции нулевого приближения для двукратно вырожденного уровня.



## Семинар N18. Уравнение Дирака

- 18.1** Найти явный вид уравнения непрерывности, плотности вероятности  $\rho(t, \vec{r})$  и тока вероятности  $\vec{j}(t, \vec{r})$  для дираковских полей.
- 18.2** Показать, что оператор релятивистского спина  $1/2$  коммутирует с гамильтонианом свободной дираковской частицы.
- 18.3** Доказать, что проекции оператора релятивистского спина  $1/2$  удовлетворяют тому же самому соотношению коммутации, что и проекции оператора нерелятивистского спина, то есть

$$\left[ \frac{\hat{O}_i}{2}, \frac{\hat{O}_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\hat{O}_k}{2}.$$

- 18.4** В стандартном представлении найти связь между оператором зарядового сопряжения  $\hat{C}$  и операторами  $\hat{C}^{-1}$ ,  $\hat{C}^\dagger$ ,  $\hat{C}^*$  и  $\hat{C}^T$ .
- 18.5** При помощи оператора зарядового сопряжения проверить, что нормировка биспиноров для античастиц имеет вид:

$$v^\dagger(\vec{p}, s_z) v(\vec{p}, s_z) = -1.$$

- 18.6** Вычислить  $Sp(\alpha_i \alpha_j)$  и  $Sp(\alpha_i \beta)$ .
- 18.7** Написать решения для частиц и античастиц в представлении Фолди-Вутхайзена.

## Семинар N19. Теория возмущений — II

- 19.1** Найти смещение уровня энергии основного состояния атома водорода под влиянием конечных размеров ядра. Ядро считать равномерно заряженным по объему шаром радиуса  $r_0$ .

- 19.2** Найти расщепление в однородном электрическом поле уровня энергии атома водорода с  $n = 2$  (эффект Штарка). Найти правильные волновые функции нулевого приближения для этой задачи.
- 19.3** Нейтрон сталкивается с ядром атома водорода, передавая ему энергию  $\Delta E = 5$  МэВ. Определить вероятность того, что при этом атом возбуждается или ионизируется.
- 19.4** Ядро атома трития испытывает  $\beta$ -распад:  $T \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}$ . Определить вероятность того, что электрон, находящийся на К-оболочке атома трития, останется на К-оболочке однократно ионизированного атома  ${}^3\text{He}$ . Считать, что вылет  $\beta$ -электрона происходит за время, значительно меньшее характерного атомного времени. Энерговыделение при  $\beta$ -распаде ядра трития  $E \approx 0,018$  МэВ.

## Семинар N20. Атом в магнитном поле. Эффекты Зеемана и Пашена-Бака. Сверхтонкое расщепление

- 20.1** Проверить, что для любого векторного оператора  $\hat{A}$  выполняется равенство:

$$\left[ \hat{J}^2, \left[ \hat{J}^2, \hat{A} \right] \right] = 2 \left( \hat{J}^2 \hat{A} + \hat{A} \hat{J}^2 \right) - 4 \hat{J} \left( \hat{J}, \hat{A} \right),$$

где  $\hat{J}$  – оператор полного момента.

- 20.2** Доказать, что:

$$\text{а) } \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \int R_{n\ell}^* \frac{1}{r} R_{n\ell} r^2 dr = \frac{Z}{n^2 a_0};$$

$$\text{б) } \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \int R_{n\ell}^* \frac{1}{r^2} R_{n\ell} r^2 dr = \frac{Z^2}{n^3 a_0^2 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)};$$

$$\text{в) } \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \int R_{n\ell}^*(r) \frac{1}{r^3} R_{n\ell}(r) r^2 dr = \frac{Z^3}{n^3 a_0^3 \ell (\ell + 1) \left( \ell + \frac{1}{2} \right)};$$

- 20.3** Определить множители Ланде следующих состояний:  ${}^4P_{1/2}$ ,  ${}^2D_{3/2}$ ,  ${}^3D_1$ ,  ${}^4D_{1/2}$ ,  ${}^3F_4$ ,  ${}^5F_1$ ,  ${}^8F_{1/2}$ ,  ${}^9H_1$ . Определить направление магнитного момента относительно механического.
- 20.4** Какие из приведенных ниже значений множителей Ланде возможны:  $g = 2$ ,  $g = 1$ ,  $g = 0$ ,  $g = -1$ ,  $g = -2$ ? Каков их физический смысл? Приведите пример состояний, которым соответствуют такие значения множителей Ланде.
- 20.5** Найти величину полного механического момента атома  $J$  и возможные его проекции на выделенное направление, а также угол между  $\vec{J}$  и орбитальным моментом  $\vec{L}$  для состояний:  ${}^3P_2$ ;  ${}^4D_{1/2}$ ;  ${}^2D_{5/2}$ ;  ${}^5F_1$ .
- 20.6** На сколько энергетических подуровней расщепятся в слабом магнитном поле уровни энергии атома в состояниях  ${}^4D_{1/2}$ ,  ${}^2P_{1/2}$ .
- 20.7** Решить задачу **15.4** для атомов лития.
- 20.8** На сколько компонент расщепятся в опытах Штерна-Герлаха пучки атомов в основном состоянии H, He, Li, Be, B, C, N, O, F, Ne. Рассмотреть случаи слабого и сильного полей.
- 20.9** На сколько компонент расщепятся в опытах Штерна-Герлаха пучки атомов в основном состоянии Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl, Ar, K, Ca. Рассмотреть случаи слабого и сильного полей.
- 20.10** Пучок атомов в состоянии  ${}^5F_1$  пролетает через область *слабого* неоднородного магнитного поля. На сколько компонент разделится пучок?
- 20.11** Пучок атомов в состоянии  ${}^5F_5$  пролетает через область *сильного* неоднородного магнитного поля. На сколько компонент разделится пучок?

**20.12** Начертить схемы зеемановского расщепления спектральных линии для переходов:

а)  ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_2$ ;

б)  ${}^3D_2 \leftrightarrow {}^3P_1$ ;

в)  ${}^1D_2 \leftrightarrow {}^1P_1$ ;

г)  ${}^4D_{5/2} \leftrightarrow {}^4F_{7/2}$

и определить сдвиг отдельных компонент относительно невозмущенной линии. Считать магнитное поле слабым.

**20.13** Какой эффект Зеемана (нормальный или аномальный) наблюдается при переходах:  ${}^1S_0 \leftrightarrow {}^1P_1$ ,  ${}^2D_{3/2} \leftrightarrow {}^2P_{3/2}$ ,  ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_0$ ,  ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_1$ .

**Указание:** Решите задачу, не строя схемы расщепления уровней и спектральных линий.

**20.14** Нарисовать схему расщепления и возможные переходы между уровнями термов  ${}^2P$  и  ${}^2S$  в слабом и сильном магнитных полях. В сильном поле пренебречь  $LS$ -взаимодействием. Найти число компонент расщепления спектральных линий.

**20.15** Сверхтонкое расщепление  $1s_{1/2}$  уровня атома водорода пропорционально матричному элементу  $\langle \vec{\sigma}_e \vec{\sigma}_p \rangle$ . Выразить этот матричный элемент через величину спина атома водорода  $S_H$ .

## **Семинар N21. Неразличимые частицы. Фермионы и бозоны. Атом гелия. Приближение $LS$ и $jj$ -связи. Другие многоэлектронные атомы. Термы. Правило Хунда.**

**21.1** Найдите значение суммарного орбитального момента в следующих электронных конфигурациях:  $sp$ ,  $sd$ ,  $pd$ ,  $pf$ ,  $df$ ,  $nsn's$ ,  $npn'p$ .

**21.2** Найдите значение суммарного орбитального момента в электронной конфигурации  $pdf$ . Сравните результаты для различных последовательностей сложения:  $pd(L')f$ ,  $pf(L')d$ ,  $df(L')p$ .

- 21.3** Найдите все возможные термы и состояния двухэлектронных конфигураций  $sp$ ,  $sd$ ,  $pd$ ,  $pf$ . Укажите их четность.
- 21.4** Найдите все возможные термы и состояния трехэлектронных конфигураций  $spd$ ,  $pdf$ . Укажите их четность.
- 21.5** Найдите все возможные термы и состояния для конфигурации двух неэквивалентных электронов  $npn'p$ .
- 21.6** Найдите все возможные термы и состояния для конфигурации двух эквивалентных электронов  $p^2$ . Почему некоторые термы конфигурации двух неэквивалентных электронов (задача **21.5**) не наблюдаются?
- 21.7** Определить термы заполненной оболочки и подоболочки.
- 21.8** Сколько электронов может помещаться на  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$  подоболочках?
- 21.9** Сколько эквивалентных электронов может помещаться на  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$  подоболочках?
- 21.10** Для первых десяти элементов периодической системы записать все возможные термы. Определить основной терм и основное состояние согласно правилу Хунда. Указать четность термов.
- 21.11** Определить основное состояние атома молибдена, электронная конфигурация которого  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^5 5s^1$ .
- 21.12** Определить основной терм и основное состояние атома, незаполненная подоболочка которого имеет электронную конфигурацию  $d^3$ ,  $d^5$ ,  $d^6$ ,  $d^7$ ,  $f^7$ ,  $f^8$ .
- 21.13** В приближении  $jj$ -связи записать все возможные термы и состояния для электронных конфигураций:  $sp$ ,  $sd$ ,  $npn'p$ ,  $pd$ ,  $pf$ ,  $df$ ,  $p^2$ .
- 21.14** Показать на примере  $pd$  конфигурации, что число состояний для данной электронной конфигурации не зависит от типа связи ( $LS$ - или  $jj$ -связь).

## Семинар N22. Физика элементарных частиц

- 22.1** Почему не наблюдается распад  $n \rightarrow p\pi^-$ ?
- 22.2**◇ Может ли при столкновении электрона с энергией  $E_- = 9$  ГэВ и позитрона с энергией  $E_+ = 3,1$  ГэВ родиться пара  $B_d^0\bar{B}_d^0$ -мезонов? А пара  $B_s^0\bar{B}_s^0$  мезонов? Массы  $M_{B_d} = 5,27$  ГэВ/ $c^2$  и  $M_{B_s} = 5,37$  ГэВ/ $c^2$ .
- 22.3**◇ В таблицах распадов элементарных частиц (PDG – Particle Data Group Summary Tables), которыми пользуются физики всего мира, можно найти любопытные распады. Один из них:  $K_1(1270) \rightarrow K_0^*(1430)\pi$ . Действительно, масса  $K_1(1270)$ -мезона составляет  $M_1 = 1272 \pm 7$  МэВ/ $c^2$ , масса  $K_0^*(1430)$  равна  $M_2 = 1425 \pm 50$  МэВ/ $c^2$ , а масса пиона  $M_\pi \approx 135 - 140$  МэВ/ $c^2$  (зависит от того нейтральный или заряженный пион рассматриваются). Таким образом формально, с учетом всех погрешностей измерения массы  $M_1 < M_2 + M_\pi$ . То есть, согласно закону сохранения энергии, подобный распад идти не может. Но он идет! И его вероятность составляет порядка 30% от всех распадов  $K_1(1270)$ -мезона. Как такое может быть? Сразу же подчеркнем, что это не ошибка или опечатка в PDG. Распад указан абсолютно верно.
- 22.4** В  $\beta$ -распаде нейтрона  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$  одна из образовавшихся частиц – антинейтрино  $\bar{\nu}_e$  – не регистрируется из-за своей высокой проникающей способности. Поэтому с точки зрения экспериментатора наблюдается распад  $n \rightarrow pe^-$ . Однако, даже не регистрируя нейтрино, физики точно знают, что среди продуктов распада должна присутствовать как минимум еще одна нейтральная и очень легкая частица. Почему?
- 22.5** С точки зрения кварковой модели объяснить, почему распад  $B^+ \rightarrow \bar{D}^0\mu^+\nu_\mu$  составляет примерно 1% от всех распадов  $B^+$  мезонов, в то время как формально похожий на него распад  $B^+ \rightarrow D^0\mu^+\nu_\mu$  в настоящее время не наблюдается и, скорее всего, не будет наблюдаться никогда?

**22.6** Вероятность какого из распадов:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ e^- \bar{\nu}_e \text{ или } K^- \rightarrow \pi^+ \pi^- e^- \bar{\nu}_e$$

больше и почему?

**22.7** В низшем порядке теории возмущений нарисуйте фейнмановские диаграммы, отвечающие следующим реакциям рассеяния фотонов ( $\gamma$ ) и глюонов  $g$ :

**а)**  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ ;

**б)**  $\gamma + g \rightarrow \gamma + g$ ;

**в)**  $\gamma + \gamma \rightarrow g + g$ ;

**г)**  $g + g \rightarrow g + g$ .

**22.8** Может ли упругое рассеяние протона на протоне происходить за счет обмена одним глюоном? А двумя?

**22.9** Почему абсолютно запрещен распад  $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ , в то время как распад  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  является доминирующим распадом для  $\rho^0$ -мезона?

**22.10** Экспериментально наблюдаются осцилляции нейтральных  $K$ -,  $B$ - и даже  $D$ -мезонов, то есть переходы  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ ,  $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$  и  $D^0 \leftrightarrow \bar{D}^0$ . Но ни в одном эксперименте не планируют наблюдать нейтронные осцилляции, то есть переходы  $n \leftrightarrow \bar{n}$ . Объясните, почему?

**22.11** В 2012 году ученые, работающие на Большом адронном коллайдере (ЛHC) в Европейском центре физики элементарных частиц (CERN), сообщили об открытии бозона Хиггса ( $H$ ) – последней частицы, необходимой для полного подтверждения Стандартной модели. Масса открытого бозона  $M_H \approx 125 \text{ ГэВ}/c^2$ . Этот бозон много лет пытались обнаружить в других экспериментах. Например, на Большом электрон-позитронном коллайдере (LEP) – предшественнике ЛHC – в реакции

$e^+e^- \rightarrow Z^0 H$ . Суммарная энергия  $e^+e^-$ -пучков на LEP в системе центра масс сталкивающихся частиц была доведена почти до  $E = 209$  ГэВ. Какой верхний предел на массу бозона Хиггса можно было получить в этом эксперименте, если масса  $Z^0$ -бозона составляет  $M_Z = 91,2$  ГэВ/ $c^2$ ?

- 22.12**◇ Взаимодействие бозона Хиггса с любой элементарной частицей ведет к тому, что эта частица приобретает массу (так называемый *механизм Хиггса*, который используется в Стандартной модели для генерации масс всех частиц). Поскольку фотон безмассовый, то, очевидно, что он не может взаимодействовать с бозоном Хиггса. Тем не менее, одним из наиболее популярных распадов, в котором изучают бозон Хиггса, является распад  $H \rightarrow \gamma\gamma$ . Нет ли тут противоречия?
- 22.13** При помощи соотношения неопределенности показать, что в физике частиц гравитация начинает играть существенную роль на масштабе энергий порядка планковской энергии  $E_P$ .
- 22.14** Пусть во Вселенной имеется всего два сорта нейтрино – электронное и мюонное. При этом состояния с определенными ароматами не являются собственными состояниями оператора массы нейтрино. Показать, что в этом случае переходы между ароматами возникают тогда и только тогда, когда масса хотя бы одного нейтрино не равна нулю.
- 22.15**◇ Решить задачу **22.14** в предположении, что во Вселенной имеется три сорта нейтрино.
- 22.16**◇ При взрыве сверхновой звезды 23 февраля 1987 года в Большом Магелановом облаке, находящемся на расстоянии  $L \approx 168$  тыс. световых лет от нашей планеты, нейтринными обсерваториями Земли, предположительно, было зарегистрировано два нейтринных всплеска. Первый



всплеск зафиксировала группа ученых из Монбланской нейтринной обсерватории в Альпах. В течение 7 сек на установке был зарегистрирован всплеск из пяти событий. Это произошло в 2 ч 52 мин всемирного времени. Второй нейтринный всплеск измерили физики на установке КАМИОКАНДА-II в Японии в 7 ч 35 мин всемирного времени, то есть почти через пять часов после первого сигнала. Энергия нейтрино во втором всплеске лежали в диапазоне от 7 до 36 МэВ. Окончательное объяснение природы двойного нейтринного всплеска не известно до сих пор. Согласно одной из гипотез, две группы нейтрино, вызвавшие всплески, родились одновременно, но имеют разную массу покоя. Оценить по этим данным минимальную массу покоя нейтрино, при которой такое объяснение возможно, если из исследования нейтринных осцилляций известно, что  $\Delta m_{12}^2 c^4 \approx 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2$ .

- 22.17**  $\diamond$  Зная вероятности распадов  $w(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0) = 99,4\%$  и  $w(\Delta^+ \rightarrow p\gamma) = 0,6\%$ , оценить  $\alpha_s(m_q)$ , где  $m_q$  – конституентная масса легкого  $u$ - или  $d$ -кварка.
- 22.18**  $J/\psi$  – мезон с массой  $M = 3,1 \text{ ГэВ}/c^2$  является основным состоянием  $c\bar{c}$ -системы. Оценить величину бегущей константы сильного взаимодействия на масштабе массы очарованного кварка  $\alpha_s(m_c)$ .
- 22.19** Покоящаяся частица  $X$  со спином  $S$  распадается на две бесспиновые частицы  $A$  и  $B$  (в физике элементарных частиц таких распадов великое множество, например,  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ ,  $K^{0*} \rightarrow K^+\pi^-$ ,  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$  и так далее). Найти угловое распределение продуктов распада, если:
- распадающаяся частица имеет определенное значение проекции  $S_z$  спина на выбранную ось  $z$ ;
  - распадающаяся частица находится в смеси состояний с различными проекциями спина.

**22.20**◊ Найти угловое распределение пионов в распаде  $B^0 \rightarrow (K^{*0} \rightarrow K^+\pi^-)\gamma$  в системе покоя  $K^{*0}$ -мезона. За ось  $z$  выбрать ось, противоположную направлению движения фотона в этой системе.

**22.21** С помощью задачи о потенциальной яме с бесконечно высокими стенками можно проиллюстрировать одну из ключевых идей теории струн – идею *компактификации дополнительных измерений*.

В теории струн предполагается, что координатное пространство имеет более трех измерений (мы НЕ рассматриваем время в качестве четвертого измерения!). Дополнительные измерения нужны для самосогласованности теории струн, поскольку струны обычно «живут» в пространствах с размерностями от 10-ти до 26-ти. Считается, что дополнительные измерения обладают очень маленьким размером и являются замкнутыми. Последнее означает, что точки, имеющие в этих измерениях координаты  $y$  и  $y + 2\pi r$ , оказываются эквивалентными. Каждое дополнительное измерение можно представить себе как колечко радиуса  $r$ . В теории струн можно показать, что при выборе достаточно малых значений  $r$  процессы, происходящие в дополнительных измерениях, никак не влияют на физику в привычном нам трехмерном мире. В этом суть идеи компактификации.

Посмотрим, как работает компактификация на более простом примере. Пусть имеется пространство всего двух измерений  $x$  и  $y$ . Измерение  $x$  – это обычное измерение, в котором имеется потенциальная яма ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq x \leq a; \\ \infty & \text{если } x < 0 \text{ и } x > a. \end{cases}$$

Измерение  $y$  – это компактное измерение радиуса  $r$ . Покажите, что наличие компактного дополнительного измерения никак не влияет на энергию нижних уровней одномерной потенциальной ямы.

**22.22** ◊ **а)** Известно, что в окружающем нас мире электромагнитное взаимодействие гораздо сильнее, чем гравитационное. Чтобы ощутить, сколь велика эта разница, найдите отношение силы отталкивания двух протонов за счет электромагнитного взаимодействия к их силе притяжения за счет гравитационного взаимодействия.

Для объяснения столь большой разницы была предположена гипотеза о  $3 + n$ -мерии нашего мира. Три измерения – это то пространство, где мы живём. В нашем пространстве протяжённость каждого измерения бесконечна. В этом и только в этом пространстве действуют электромагнитные силы. Остальные  $n$  измерений замкнуты в виде окружностей и имеют небольшой конечный радиус  $R$  каждое. Такие измерения получили название *дополнительных измерений*.

Предположим, что гравитация действует одинаково во всех  $3 + n$  измерениях. Рассмотрим две массы  $m_1$  и  $m_2$ . Если расстояние между ними  $r \gg R$ , то вклад замкнутых дополнительных измерений не должен сказываться на силе гравитационного взаимодействия. Гравитационный потенциал в этом случае хорошо известен и описывается формулой Ньютона:

$$U(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{\hbar c}{m_{Pl}^2} \frac{m_1 m_2}{r},$$

где  $m_{Pl} = \sqrt{\hbar c / G_N}$  – так называемая масса Планка. Найдите её численное значение. Сравнить эту массу с массой муравья.

При  $r \ll R$  гравитация одинаково действует во всех  $3 + n$  измерениях.

Поэтому гравитационный потенциал следует записать в виде:

$$U_X(r) = -G_X \frac{m_1 m_2}{r^{n+1}},$$

где  $G_X$  – новая гравитационная постоянная, которая с физической точки зрения должна быть более фундаментальной, чем гравитационная постоянная Ньютона  $G_N$ .

**б)** Вместо постоянной  $G_X$  введем новую фундаментальную массу  $m_X$  таким образом, чтобы с ее помощью и с помощью фундаментальных констант  $\hbar$  и  $c$  можно было бы восстановить размерность потенциала  $U_X(r)$ . Покажите, что в этом случае  $G_X = \frac{\hbar c}{m_X^2} \left( \frac{\hbar}{m_X c} \right)^n$ . Найдите, как зависит гравитационный потенциал  $U_X(r)$  в пределе  $r \gg R$  от  $m_X$ .

С другой стороны, в пределе  $r \gg R$  потенциал гравитационного взаимодействия описывается функцией  $U(r)$ . Чтобы не возникло противоречия, необходимо потребовать, чтобы при  $r \gg R$  оба потенциала совпадали. Из этого условия выразите длину  $L$  и радиус  $R$  дополнительного измерения через массы  $m_X$  и  $m_{Pl}$ .

**в)** Предположим, что  $m_X c^2 \approx 10^3$  ГэВ. Такой выбор по порядку величины соответствует характерным энергиям электромагнитного взаимодействия и обеспечивает универсальность электромагнетизма в трех измерениях и гравитации в  $3 + n$  измерениях. Найдите размер дополнительного измерения  $R$  для числа дополнительных измерений  $n = 2$  и  $n = 3$ . Почему нельзя выбрать  $n = 1$ ?

**Подсказка:** В настоящее время закон всемирного тяготения проверен экспериментально вплоть до расстояний порядка нескольких десятых долей миллиметра.

**22.23**  $\diamond$  Укажите, чем будет отличаться от нашего мира мир, в котором  $m_n < m_p + m_e$ , где  $m_n$  – масса нейтрона,  $m_p$  – масса протона и  $m_e$  – масса электрона?

**22.24**  $\diamond$  В теориях с нарушением лептонного числа найти отношение вероятностей распадов  $w(\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \nu_\mu) / w(\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+)$ .

**22.25**  $\diamond$  Пусть наш мир на самом деле является не четырехмерным  $(t, x, y, z)$ , а пятимерным, то есть  $(t, x, y, z, w)$ , где  $w$  – дополнительная координата.

И пусть в пятом измерении имеется потенциал  $U(w)$ , дискретные уровни энергии которого соответствуют энергиям покоя реальных частиц в четырехмерном мире. Рассмотреть физику микромира в предположении, что потенциал  $U(w)$  является: **а)** потенциальной ямой ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками; **б)** кулоновским потенциалом.

Какие реальные частицы могли бы отвечать низшим уровням потенциала  $U(w)$ ? Какие из известных распадов были бы абсолютно запрещены в такой модели?

## Ответы

**1.3.**  $e = 4,80320427(13) \cdot 10^{-10}$  единиц заряда СГСЭ.

**1.6.**  $m_{e^-} = 0,511 \text{ МэВ}/c^2$ ,  $m_p = 938 \text{ МэВ}/c^2$ .

**1.7.**  $\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{T}{mc^2}\right)^2 + 2\frac{T}{mc^2}$

**а)**  $5,9 \cdot 10^7 \frac{\text{см}}{c}$ ; **б)**  $2,77 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{c}$ .

**1.8.** Интенсивность в точке  $P$ :  $I(P) = I_{max} \text{sinc} \left[ \frac{kd \sin \theta}{2} \right]$ , где  $I_{max} = I_0 \frac{d^2}{\lambda b}$ ,  $b$  – расстояние до точки  $P$ .

**1.12.**  $\langle n_\omega(T) \rangle \approx (2,4k^3/\hbar^3\pi^2c^3) \cdot T^3 = 20,5 \cdot T^3 \text{ см}^{-3}$ .

**1.13.** Формула Планка:

при  $\hbar\omega \gg kT$  переходит в формулу Вина  $\rho_\omega(T) \cong \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \exp(-\hbar\omega/kT)$ ;

при  $\hbar\omega \ll kT$  переходит в закон Рэлея-Джинса  $\rho_\omega(T) \cong \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} kT$ .

**1.14.**  $\rho_\omega(T) = \frac{8\pi\hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\hbar c/\lambda kT) - 1}$ .

**1.17.** Звезду можно рассматривать как абсолютно черное тело, при этом, если максимум излучения попадает в зеленую область спектра (550 нм), то глаз воспринимает излучение как белое, так как воспринимается не только максимальная длина волны, но весь видимый спектр, середина которого – зеленая область.

**1.18.** 1,22 мм.

**1.19.**  $2,3 \cdot 10^{12} \frac{\text{фотонов}}{\text{см}^3}$ .

**1.20.**  $v = 5,3 \cdot 10^7 \text{ см}/c$ .

**1.21.**  $\omega = 6,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**1.22.**  $W = 1,89 \text{ эВ}$ .

**1.23.** Спектр состоит из электронов двух энергий:  $E = 0,61 \text{ эВ}$  и  $E = 3,77 \text{ эВ}$ .

**2.1.** Показать, что условие задачи ведет к неверному равенству  $p_0^2 c^2 \sin^2 \theta = -m^2 c^4$

**2.2.** **а)**  $\omega' = \omega \frac{T + mc^2 + \sqrt{T^2 + 2Tmc^2} \cos \alpha}{T + mc^2 + \sqrt{T^2 + 2Tmc^2} \cos \beta + \hbar\omega(1 - \cos(\alpha - \beta))}$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  – углы падения и рассеяния фотона,  $\theta$  – угол рассеяния электрона; так, для

рассеяния фотона назад на движущемся ему навстречу электроны  $\alpha = 0, \beta = \pi$ ;  
**б)**  $\omega' \gg \omega$ ; **в)** 40 МэВ; **г)** 2,4 КэВ.

2.3.  $\frac{\Delta\lambda_e}{\Delta\lambda_p} = \frac{M}{m} \approx 1836$ , где  $m$  – масса электрона,  $M$  – масса протона.

2.4.  $\hbar\omega' = 0,99999\text{КэВ}$

2.5.  $v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}}$

2.6.  $d_n(\cos \alpha_n - \cos \beta_n) = m_n \lambda$ ;  $n = 1, 2, 3$ .

2.7. 1,67 Å.

2.8. Время излучения  $\tau = \gamma^{-1}$ , где  $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^2}$  – классическая постоянная затухания,  $\omega_0 = \sqrt{e^2/mR^3} \approx 10^{16} \text{ с}^{-1}$  – частота излучения атома Томсона.

2.9.  $\theta_{\max} = 2Ze^2/E_\alpha R \approx 4 \cdot 10^{-4}$ .

2.10. Частоты излучения  $\omega_0$ ;  $\omega_0 \pm \Omega$ , где  $\Omega = eH/2mc$ , а  $\omega_0 = \sqrt{e^2/mR^3}$  – частота излучения атома Томсона. Полученные частоты излучения образуют нормальный лоренцевский триплет, наблюдаемый в простом эффекте Зеемана. Для  $H = 10^5 \text{ Э}$   $\Omega \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

2.11.  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \rho_\perp^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ .

2.12.  $10^{-12} \text{ см}$ .

2.13. Частицы будут рассеиваться одинаково.

2.14.  $\rho_\perp = \frac{Ze^2}{E_\alpha} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ см}$ .

3.1. 13,6 эВ.

3.2. Да, электрон уйдет в континуум.

3.3.  $v/c = \alpha$ , где  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  – постоянная тонкой структуры.

3.4.  $R_H = me^4/2\pi\hbar^3 = 109737 \text{ см}^{-1}$ ,  $\frac{1}{\lambda_{nm}} = -Z^2 R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ .

3.5.  $\Delta E_n = -\frac{m^2 e^2 GM}{n^2 \hbar^2} \approx 8,3 \cdot 10^{-39} \text{ эВ}$ .

3.6.  $E_n = -me^4/4\hbar^2$ ,  $a_n = 2\hbar^2/me^2$ ,  $I = 6,8 \text{ эВ}$ .

3.8. 1,89 эВ.

3.9.  $v = c \frac{\hbar\omega}{Mc^2} \approx 3,3 \cdot 10^2 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\hbar\omega_0}{2Mc^2}\right)$ ,  $\frac{\hbar\omega_0}{2Mc^2} \approx 10^{-8}$ .

3.10.  $\hbar\omega_n = 2Z^2 Ry/n^3 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**3.11.** Возьмем типичные параметры: масса черной дыры  $M = 10^{33}$  г, масса пылинки  $m = 10^{-4}$  г, тогда  $E_n = -\frac{m}{2} \left( \frac{GmM}{n\hbar} \right)^2$ ,  $\omega_{12} = 1,4 \cdot 10^{120} \text{ с}^{-1}$ .

**4.1.**  $\lambda_{H_2} \approx 1,1 \cdot 10^{-7}$  см, что соответствует энергии 1,14 КэВ;  $\lambda_{He} \approx 7,7 \cdot 10^{-8}$  см, что соответствует энергии 1,6 КэВ.

**4.2.**  $v = \frac{2c}{\sqrt{5}} = 2,6 \cdot 10^{10}$  см/с.

**4.3.**  $\lambda = \hbar c/T \approx 3 \cdot 10^{-17}$  см. При использовании нерелятивистского выражения можно ошибочно получить следующее выражение:  $\lambda = \hbar/\sqrt{2mT} \approx 1,4 \cdot 10^{-15}$  см.

**4.4.**  $\lambda_e = 1,2 \cdot 10^{-11}$  см – релятивистский случай,  $\lambda_p = 0,9 \cdot 10^{-12}$  см – нерелятивистский случай

**4.5.** 1,5 эВ; 0,83 МэВ; 1,24 ГэВ.

**4.7.**  $2\theta \approx 2,6 \cdot 10^{-33}$ .

**4.8.** 0,4 ГэВ.

**4.10.**  $n = \sqrt{\frac{E+W}{E}}$ , где  $E$  – энергия электрона в вакууме. Для доказательства справедливости закона преломления необходимо учесть, что при проникновении в кристалл меняется лишь нормальная компонента скорости электрона.

**4.11.** Длина волны де Бройля  $\lambda = 0,103$  нм; расстояние между соседними максимумами  $\delta = L'\lambda/d \approx 8,2$  мкм, что совпадает с экспериментальной зависимостью в пределах ошибок.

**4.12.**  $2,8 \cdot 10^4$  см/с.

**5.4.**  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$

**5.5.** Норма вектора  $\|\psi\| = \langle \psi | \psi \rangle = 2(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2))$ . Поэтому:

**а)**  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  или  $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi$ ; **б)**  $\theta_1 - \theta_2 = \pm\pi$ ; **в)**  $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3$  или  $\theta_1 - \theta_2 = 4\pi/3$ . Очевидно, что к каждому из равенств можно добавить  $2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**5.7.**  $-1$ .

**5.9.** Проверить, что для этих операторов выполняются аксиомы, которым удовлетворяют линейные операторы.



**5.11.**  $\hat{B}^\dagger = (i\hat{A})^\dagger = -i\hat{A}^\dagger = -i\hat{A} = -\hat{B}$ , что удовлетворяет определению антиэрмитового оператора.

**5.12.**  $\hat{A} = \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$ .

**5.13.** Не всегда, например,  $F(\hat{A}) = (i\hat{A})^{2n+1}$ , где  $n$  – неотрицательное целое число – антиэрмитов оператор, согласно решению задачи **5.11**. Другой типичный пример будет рассмотрен в задаче **5.17**.

**5.14.**  $\sin \hat{A} | \psi \rangle = \int da \frac{\sin 2a}{2} | a \rangle$ .

**5.15.** Рассмотрим типичный прием, который применяется при доказательстве функциональных операторных тождеств. Определим следующую операторную функцию  $\hat{F}(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda\hat{A}}$ , где  $\lambda$  – произвольный действительный параметр. Очевидно, что  $\hat{F}(0) = \hat{B}$  и  $\hat{F}(1) = e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}}$ .

Первая производная:  $\frac{d\hat{F}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{e^{\lambda\hat{A}}}{d\lambda} \hat{B} e^{-\lambda\hat{A}} + e^{\lambda\hat{A}} \hat{B} \frac{e^{-\lambda\hat{A}}}{d\lambda} = [\hat{A}, \hat{F}(\lambda)]$ .

Вторая производная:  $\frac{d^2\hat{F}(\lambda)}{d\lambda^2} = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{F}(\lambda)]]$  и так далее. Теперь разложим  $\hat{F}(\lambda)$  в ряд Тейлора в окрестности нуля. Получаем:

$$\hat{F}(\lambda) = \hat{F}(0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{d\hat{F}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\hat{F}(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} \lambda^2 + \dots = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] \lambda + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] \lambda^2 + \dots$$

Полагая в этой формуле  $\lambda = 1$  приходим к решению нашей задачи.

**5.16.** Рассмотрим операторную функцию  $\hat{F}(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}}$ . Очевидно, что  $\hat{F}(0) = \hat{1}$ . Используя результат задачи **5.15** составим для этой функции дифференциальное уравнение. Имеем:

$$\frac{d\hat{F}(\lambda)}{d\lambda} = (\hat{A} + e^{\lambda\hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda\hat{A}}) \hat{F}(\lambda) = (\hat{A} + \hat{B} + \lambda\hat{C}) \hat{F}(\lambda)$$

Его решение с учетом граничного условия  $\hat{F}(0) = \hat{1}$  есть:  $\hat{F}(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A} + \hat{B}) + \lambda^2\hat{C}/2}$ . При  $\lambda = 1$ , получаем решение задачи.

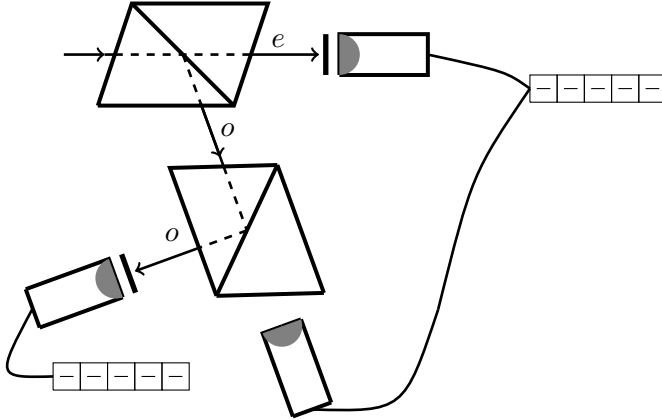
**5.17.** Из определения операторной экспоненты и эрмитовости оператора  $\hat{A}$  следует, что  $\hat{U}^\dagger = e^{-i\hat{A}}$ . Тогда по формуле Глаубера-Бекера-Хаусдорфа име-

ем:  $\hat{U} \hat{U}^\dagger = e^{i\hat{A}} e^{-i\hat{A}} = e^{i(\hat{A}-\hat{A})} e^{[\hat{A}, \hat{A}]/2} = \hat{1}$ . Аналогично доказывается, что  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}$ . Таким образом, оператор  $\hat{U}$  по определению является унитарным.

**5.18.** Проверить определение линейного оператора и аксиомы.

**5.19.** Подсказка:  $\hat{K}^\dagger \hat{K} = \hat{I}$ .

**6.1.**



**6.3.**  $\langle \psi | = \sum_j C_j^* \langle a_j |$ .

**6.4.**  $w_i = |C_j|^2 = C_j^* C_j = \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle = \langle \psi | (|a_j\rangle \langle a_j|) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_{a_j} | \psi \rangle \equiv \langle \hat{P}_{a_j} \rangle_\psi$ , что и требовалось доказать.

**6.6.** Эксперимент Бибермана-Сушкина-Фабриканта доказывает, что принцип суперпозиции верен для каждой квантовой системы по-отдельности и не является феноменологическим описанием каких-либо коллективных взаимодействий большого числа квантовых систем между собой и с измерительным прибором. При этом нельзя предсказать результат измерения, проведенный над одной отдельно взятой квантовой системой. Но результат измерения над ансамблем одинаково приготовленных квантовых систем ведет себя согласно постулату о физическом смысле коэффициентов разложения в принципе суперпозиции.

Заметим, что оригинальная статья Л.Бибермана, Н.Сушкина и В.Фабриканта из журнала «Доклады Академии наук СССР» т. **66**, №2, с. 185 (1949) практи-

чески недоступна для рядового читателя. Однако в сети имеется ее хорошее изложение на сайте журнала «Успехи физических наук». Пересказ оригинальной статьи трех авторов можно найти в заметке «Диффракция одиночных поочередно летящих электронов», УФН, т. 38, вып. 4, с. 570 (1949).

**6.8.** Поскольку вектор  $\langle x |$  является собственным вектором оператора  $\hat{x}$ , отвечающим собственному значению  $x$ , то  $\langle x | \hat{x} = x \langle x |$ . Тогда  $\langle x | \hat{x} | \tilde{x} \rangle = x \langle x | \tilde{x} \rangle = x \delta(x - \tilde{x})$ , что и требовалось доказать.

**6.9.** 
$$\langle d | \hat{A} \hat{B} | \tilde{d} \rangle = \int dc d\bar{c} d\tilde{c} \Psi_c(d) A(c, \bar{c}) B(\bar{c}, \tilde{c}) \Psi_{\tilde{c}}^*(\tilde{d}).$$

**6.10.** Ответ этой задачи  $\langle b | \hat{A}^n | \tilde{b} \rangle = A^n(b, \tilde{b}) \delta(b - \tilde{b})$  чрезвычайно важен для различных вычислений в квантовой теории. Например, используя результат данной задачи можно найти ядро оператора кинетической энергии, зная ядро оператора импульса.

Проведем доказательство для оператора  $\hat{A}^2$ . После этого доказательство общего случая очевидно. Имеем:  $\langle b | \hat{A}^2 | \tilde{b} \rangle = \int d\bar{b} \langle b | \hat{A} | \bar{b} \rangle \langle \bar{b} | \hat{A} | \tilde{b} \rangle = \int d\bar{b} A(b, \bar{b}) A(\bar{b}, \tilde{b}) \delta(b - \bar{b}) \delta(\bar{b} - \tilde{b}) = A^2(b, \tilde{b}) \delta(b - \tilde{b})$ .

**6.11.** Из условия задачи ясно, что совокупность векторов  $\{|b\rangle\}$  образует непрерывный спектр. Тогда  $|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = \int d\tilde{b} \hat{A}|\tilde{b}\rangle \langle \tilde{b}|\psi\rangle = \int d\tilde{b} \hat{A}|\tilde{b}\rangle \psi(\tilde{b})$ . Умножаем равенство на  $\langle b|$  и получаем:  $\phi(b) = \langle b|\phi\rangle = \int d\tilde{b} \langle b|\hat{A}|\tilde{b}\rangle \psi(\tilde{b}) = \int d\tilde{b} A(b, \partial/\partial b, \partial^2/\partial b^2, \dots) \delta(b - \tilde{b}) \psi(\tilde{b}) = A(b, \partial/\partial b, \partial^2/\partial b^2, \dots) \psi(b)$ . Этот результат стоит запомнить, поскольку он возникает в большом количестве приложений.

**6.12.** 
$$\int d\tilde{a} \langle a | \hat{B} | \tilde{a} \rangle \Phi_b(\tilde{a}) = b \Phi_b(a); \int \Phi_b^*(a) \Phi_b(a) da = \delta(b - \tilde{b}).$$

**6.13.** 
$$\langle p | \hat{p} | \tilde{p} \rangle = p \delta(p - \tilde{p}).$$

**6.14.** Для решения надо воспользоваться результатами задачи **6.10**. Тогда:

в  $p$ -представлении  $\langle \tilde{p} | \hat{p}^n | p \rangle = p^n \delta(p - \tilde{p})$ ;

в  $x$ -представлении  $\langle \tilde{x} | \hat{p}^n | x \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x - \tilde{x})$ .

**6.15.**  $\sum_i |\psi(a_i)|^2 = 1$  – дискретный спектр;  $\int |\psi(a)|^2 da = 1$  – непрерывный спектр;  $\sum_i |\psi(a_i)|^2 + \int |\psi(a)|^2 da = 1$  – смешанный спектр.

**6.16.** Для доказательства предположим, что вектор состояния  $|\psi\rangle$  представляет собой суперпозицию двух векторов состояния  $|\varphi_1\rangle$  и  $|\varphi_2\rangle$ , то есть

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle.$$

Теперь с одной стороны, мы можем применить процедуру клонирования непосредственно к вектору  $|\psi\rangle$ . Это дает

$$\begin{aligned} |\psi\rangle |0\rangle &\rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle = (C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle) \times (C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle) = \\ &= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + C_1 C_2 (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle). \end{aligned}$$

С другой стороны, гипотетическую операцию клонирования можно применить к каждому из векторов линейной комбинации. В этом случае:

$$|\psi\rangle |0\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle \rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle.$$

Если операция клонирования самосогласованна, то оба результата должны совпадать. Но из-за наличия дополнительного интерференционного слагаемого в первом случае, совпадение обоих способов клонирования состояния  $|\psi\rangle$  возможно только при условии  $C_1 = C_2 = 0$ . В остальных случаях операция клонирования НЕ согласуется с принципом суперпозиции, который является одним из постулатов нерелятивистской квантовой теории. Теорема доказана.

Еще раз специально подчеркнем, что в теореме о невозможности клонирования ключевую роль играет то, что вектор состояния НЕИЗВЕСТЕН (или произволен). Известный вектор клонировать можно.

Данная теорема была впервые доказана в работе W. K. Wootters and W. H. Zurek, "A Single Quantum Cannot Be Cloned," Nature **299**, p.802 (1982).

**6.17.** Это, в некотором смысле, теорема, обратная теореме о невозможности клонирования произвольного чистого состояния. Ключевыми в названии теоремы являются слова “одна из копий” и “произвольного”, поскольку, очевидно, что любое чистое состояние можно уничтожить, например, произведя над ним измерение. А измерение приводит к редукции.

Для доказательства рассмотрим некоторое чистое состояние

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle,$$

которое разложено по базису  $|\varphi_i\rangle$  в двумерном гильбертовом пространстве. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  подчиняются стандартному условию нормировки

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

Для предания смысла принципу суперпозиции, дополнительно потребуем, чтобы  $C_1 \neq 0$  и  $C_2 \neq 0$ . В остальном коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  являются абсолютно произвольными.

Предположим, что существует процедура уничтожения одной из копий произвольного чистого состояния. Тогда применим эту процедуру к вектору  $|\psi\rangle$ . Получим:

$$|\psi\rangle |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle |0\rangle \rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle.$$

Далее рассмотрим  $|\psi\rangle$  как линейную комбинацию  $|\varphi_1\rangle$  и  $|\varphi_2\rangle$  и применим процедуру уничтожения к произведению линейных комбинаций:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle |\psi\rangle &= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + C_1 C_2 (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle) \rightarrow \\ &\rightarrow C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle, \end{aligned}$$

где  $|\Phi\rangle$  – некоторое вспомогательное состояние, которое не должно зависеть от коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ .

Найдем, при каких условиях оба выражения совпадают. Для этого решаем уравнение:

$$\text{const} \times \left( C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle \right) = C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle.$$

Оно превращается в тождество, если

$$\text{const} = C_1 + C_2 \quad \text{и} \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \right) |0\rangle.$$

Заметим, что если  $\text{const} = 0$  (то есть,  $C_1 = -C_2$ ), то результаты двух представленных выше версий процедур уничтожения не возможно согласовать друг с другом. То есть процедура уничтожения становится в этом случае противоречивой. Таким образом, например, копию состояния

$$|\chi^{(1)}\rangle = \left| \psi \left( C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle \right)$$

уничтожить нельзя. Теперь рассмотрим уничтожение одной из копий чистого состояния

$$|\psi^{(\perp)}\rangle = C_2^* |\varphi_1\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle.$$

Применим искомую процедуру к самому вектору

$$|\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle \rightarrow |\psi^{(\perp)}\rangle |0\rangle \rightarrow C_2^* |\varphi_1\rangle |0\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle |0\rangle$$

и к его разложению в суперпозицию

$$\begin{aligned} |\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle &= \left( C_2^* \right)^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + \left( C_1^* \right)^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle - \\ &- C_1^* C_2^* \left( |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( C_2^* \right)^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + \left( C_1^* \right)^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle - \sqrt{2} C_1^* C_2^* |\Phi\rangle, \end{aligned}$$

где состояние  $|\Phi\rangle$  должно быть точно таким же, как и выше.

Результаты обеих процедур уничтожения согласуются, если выбрать

$$\text{const} = C_2^* - C_1^*.$$

Исключением является, когда  $\text{const} = 0$ , то есть когда  $C_2^* = C_1^*$  или  $C_1 = C_2$ . Для такого выбора констант процедура уничтожения неопределена. Поэтому копию состояния

$$|\chi^{(2)}\rangle = \left| \psi \left( C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

невозможно уничтожить также, как и копию состояния  $|\chi^{(1)}\rangle$ .

Состояния  $|\chi^{(1)}\rangle$  и  $|\chi^{(2)}\rangle$  являются базисом в двумерном гильбертовом пространстве. Следовательно, любое состояние  $|\phi\rangle$  можно разложить по этому базису

$$|\phi\rangle = \alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты разложения, удовлетворяющие условию нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Для завершения доказательства применим процедуру уничтожения к  $|\phi\rangle|\phi\rangle$ . С одной стороны она должна давать

$$|\phi\rangle|\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle|0\rangle = \left( \alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle \right) |0\rangle.$$

С другой стороны, эта процедура невыполнима, поскольку

$$\begin{aligned} |\phi\rangle|\phi\rangle &= \alpha^2 |\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle + \beta^2 |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + \\ &+ \alpha\beta \left( |\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle \right) \rightarrow ?, \end{aligned}$$

а, как было доказано выше, уничтожение копий состояния  $|\chi^{(1)}\rangle$  и  $|\chi^{(2)}\rangle$  невозможно. Получили противоречие.

Доказательство было опубликовано в работе: А. К. Pati and S. L. Braunstein, Nature **404**, p.164 (2000).

**7.1. а)** Уровни энергии находятся из уравнения:  $\kappa a = -ka \tan^{-1}(ka)$ , где  $\kappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$ ,  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ;

**б)** уровни энергии находятся из уравнения:  $\kappa a = -ka \tan^{-1}(ka/2)$ , где  $\kappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$ ,  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ;

**в)** уровни энергии находятся из уравнения:  $\kappa_1 + \kappa_2 = (k - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{k}) \tan(ka)$ , где  $\kappa_2^2 = \frac{2m(U_2 - E)}{\hbar^2}$ ,  $\kappa_1^2 = \frac{2m|U_1 - E|}{\hbar^2}$ ,  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ .

**7.2.** Система из двух  $\delta$ -ям имеет два энергетических уровня  $\kappa = k_0(1 \pm e^{-2\kappa a})$ ,  $\kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$ ; при  $k_0 a \gg 1$  два уровня сливаются в один.

**7.3.** Волновая функция – функция Эйри  $\psi(z) = N \Phi \left[ \left( \frac{2m^2 g}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left( z - \frac{E}{mg} \right) \right]$ ,

уровни энергии  $E_n = \left( \frac{m \hbar^2 g^2}{2} \right)^{1/3} \alpha_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots, \alpha_k$  – нули функции Эйри.

**7.4.**  $\frac{p^2}{2m} \phi(p) + \int \tilde{U}(p - p') \phi(p') dp' = E \phi(p)$ , энергетический спектр свободной частицы  $E = \frac{p^2}{2m}$ .

**8.1.**  $\frac{5}{12} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$ .

**8.2.**  $\frac{5\pi^2 \hbar^2}{2\Delta E a^2}$ .

**8.3.**  $\hat{p} = \frac{4i\hbar}{a} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{15} & \dots \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{12}{7} & \dots \\ -\frac{4}{15} & 0 & -\frac{12}{7} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ ,

матричные элементы  $p_{n,n'} = \begin{cases} 0 & \text{для } n \text{ и } n' \\ & \text{одинаковой четности} \\ \frac{4i\hbar}{a} \frac{nn'}{n'^2 - n^2} & \text{для } n \text{ и } n' \\ & \text{разной четности} \end{cases}$ .



$$\hat{x} = \frac{-8a}{\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{-\pi^2}{16} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{2025} & \cdots \\ \frac{2}{9} & \frac{-\pi^2}{16} & \frac{6}{25} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{-\pi^2}{16} & \frac{12}{49} & \cdots \\ \frac{4}{2025} & 0 & \frac{12}{49} & \frac{-\pi^2}{16} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\text{матричные элементы } x_{n,n'} = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{для } n = n' \\ 0 & \text{для } n \neq n', n \text{ и } n' \\ & \text{одинаковой четности} \\ \frac{-8a}{\pi^2} \frac{nn'}{(n-n')^2(n+n')^2} & \text{для } n \text{ и } n' \\ & \text{разной четности} \end{cases}$$

$$8.4. \quad E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right).$$

$$8.5. \quad \Delta E_{n+1, n} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(a+vt)^2} (2n+1).$$

$$8.6. \quad \frac{16\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}.$$

$$8.7. \quad \left( \frac{mU_0 a}{\hbar^2} + \sin^2 \left[ \frac{mU_0 a}{\hbar^2} \right] \right)^{-1}.$$

$$8.10. \quad \mathbf{a)} \ 3/2; \ \mathbf{б)} \ 11/2; \ \mathbf{в)} \ 0 \text{ для всех нечетных степеней } n; \ \mathbf{г)} \ \sqrt{3}/i\sqrt{2}.$$

$$9.1. \quad \mathbf{a)} \quad \hat{J}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{б)} \quad \hat{J}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b)} \quad \hat{J}_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{J}_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^2 = \frac{15}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\hat{J}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**9.2.** Докажем утверждение задачи, например, для оператора  $\hat{J}_y$ . Из коммутационных соотношений между компонентами оператора полного момента имеем:  $[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y$ . Тогда  $i\langle \hat{J}_y \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{J}_z \hat{J}_x - \hat{J}_x \hat{J}_z | \psi \rangle = \langle \psi | m_\psi \hat{J}_x - \hat{J}_x m_\psi | \psi \rangle = m_\psi \left( \langle \hat{J}_x \rangle_\psi - \langle \hat{J}_x \rangle_\psi \right) = 0$ , что и требовалось доказать. Для оператора  $\hat{J}_x$  доказательство проводится аналогично.

**9.3.** Спиноры  $\chi_\pm(\vec{n})$  должны быть собственными функциями оператора  $\frac{1}{2} \hat{P}_{\vec{n}} = (\vec{n}, \hat{\vec{S}})$  проекции спина 1/2 на ось  $\vec{n}$ , отвечающими собственным значениям  $\pm 1/2$ , то есть:  $\hat{P}_{\vec{n}} \chi_\pm(\vec{n}) = \pm \chi_\pm(\vec{n})$ . В матричной форме оператор  $\hat{P}_{\vec{n}}$  записывается как

$$\hat{P}_{\vec{n}} = (\vec{n}, \hat{\vec{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Найдем явный вид спинора  $\chi_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . В силу условия нормировки  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  спинор  $\chi_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\beta} \end{pmatrix}$ . Тогда компоненты спинора

$\chi_+(\vec{n})$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha e^{i(\beta-\varphi)} = \cos \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha e^{i\varphi} - \cos \theta \sin \alpha e^{i\beta} = \sin \alpha e^{i\beta} \end{cases} .$$

В первом уравнении системы второе слагаемое в левой части – комплексное число, а остальные члены этого уравнения – действительные числа. Поэтому, мнимая часть второго слагаемого должна занулиться, что выполняется, если  $\beta = \varphi$ . С учетом этого условия, система принимает простой вид:

$$\begin{cases} \cos(\theta - \alpha) = \cos \alpha \\ \sin(\theta - \alpha) = \sin \alpha \end{cases} ,$$

решением которой является  $\alpha = \theta/2$ . Таким образом,

$$\chi_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} .$$

Используя условие ортогональности спиноров  $\chi_+(\vec{n})$  и  $\chi_-(\vec{n})$  немедленно на-

ходим, что  $\chi_-(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} .$

**9.4.**  $w_{+1/2-1/2} = \sin^2 \frac{\theta}{2} .$

**9.5.**  $w_{+1/2+1/2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} .$

**9.6.** **а), в)**  $w_1 = w_{-1} = \frac{\sin^2 \theta}{2}$ ; **б)**  $w_0 = \cos^2 \theta$ ; **г)**  $\langle (\vec{l} \vec{n}) \rangle = m \cos \theta = 0$ ,

$\langle (\vec{l} \vec{n})^2 \rangle = \sin^2 \theta \frac{l(l+1)-m^2}{2} + m \cos^2 \theta = \sin^2 \theta .$

**9.7.** Доказательство имеет смысл проводить в координатном представлении, где оно имеет ясный физический смысл. По определению оператора отражения  $\hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ . Безразмерный оператор орбитального момента в координатном представлении  $\hat{L} = -i [\vec{r} \times \vec{\nabla}]$ . Поэтому  $\hat{P}\hat{L} = -i [(-\vec{r}) \times (-\vec{\nabla})] =$

$-i [\vec{r} \times \vec{\nabla}] = \hat{L}$ . Тогда можем написать:  $[\hat{P}, \hat{L}] \psi(\vec{r}) = \hat{P} (\hat{L} \psi(\vec{r})) - \hat{L} \hat{P} \psi(\vec{r}) = \hat{L} \psi(\vec{r}) - \hat{L} \psi(\vec{r}) = 0$ . Все доказано. После этого доказательство коммутации операторов  $\hat{P}$  и  $\hat{L}^2$  не должно вызвать особых затруднений.

**10.3.**  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = N_{nlm} \frac{1}{\sqrt{r}} \chi_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ , где  $\chi_{nl}(r) = J_{l+1/2}(k_n r)$ ;  $E_n = \frac{\hbar^2 \alpha_n^2}{2ma^2}$ , где  $\alpha_n$  – нули функции Бесселя, то есть  $J_{l+1/2}(k_n a) = 0$ ,  $k_n a = \alpha_n$ .

**10.4.** а)  $E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar \omega (n_x + n_y + n_z + 3/2)$ ;

б)  $E_n = \hbar \omega (n + 3/2)$ , где  $n = 2n_r + l$  – осцилляторное главное квантовое число.

**10.5.** а)  $\langle L_z \rangle_\psi = \frac{9}{10}$ ,  $\langle \vec{L}^2 \rangle_\psi = 2$ ,  $\langle E \rangle_\psi = -\frac{Ry}{4}$ ,  $\langle W \rangle_\psi = \frac{Ry}{4}$ ;

б)  $\langle L_z \rangle_\psi = \frac{4}{5}$ ,  $\langle \vec{L}^2 \rangle_\psi = \frac{24}{5}$ ,  $\langle E \rangle_\psi = -\frac{21}{100} Ry$ ,  $\langle W \rangle_\psi = \frac{21}{100} Ry$ ;

в)  $\langle L_z \rangle_\psi = -\frac{4}{3}$ ,  $\langle \vec{L}^2 \rangle_\psi = \frac{22}{3}$ ,  $\langle E \rangle_\psi = -\frac{19}{1350} Ry$ ,  $\langle W \rangle_\psi = \frac{19}{1350} Ry$ ;

г)  $\langle L_z \rangle_\psi = -\frac{1}{4}$ ,  $\langle \vec{L}^2 \rangle_\psi = \frac{7}{2}$ ,  $\langle E \rangle_\psi = -\frac{7}{48} Ry$ ,  $\langle W \rangle_\psi = \frac{7}{48} Ry$ .

**10.6.** а)  $\psi_{211}$ ,  $\psi_{21-1}$ ,  $-Ry/4$ ; б)  $\psi_{211}$ ,  $-Ry/4$ ; в)  $\psi_{21-1}$ ,  $-Ry/4$ ; г)  $\psi_{322}$ ,  $-Ry/9$ ; д)  $\psi_{32-2}$ ,  $-Ry/9$ .

**10.7.** а)  $-Ry/16$ , б)  $-4Ry/9$ , в)  $-Ry/9$ , г)  $-9Ry/16$ .

**10.8.** а) 3; б) 2.

**10.9.** 1s-состояние:  $\psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \exp(-\frac{r}{a_0})$ ,  $\langle r \rangle_{1s} = \frac{3a_0}{2}$ ,  $\langle r^2 \rangle_{1s} = 3a_0^2$ ,  $D = \frac{3a_0^2}{4}$ ,  $\langle r^n \rangle_{1s} = \frac{a_0^n}{2^{n+1}} \Gamma(n+3)$ ,  $r_{\text{н.в.}} = a_0$ ,  $\langle U \rangle_{1s} = -\frac{e^2}{a_0}$ ,  $\langle T \rangle_{1s} = \frac{e^2}{2a_0}$ ;

2s-состояние:  $\psi_{200} = \sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} (1 - \frac{r}{2a_0}) \exp(-\frac{r}{2a_0})$ ,  $\langle r \rangle_{2s} = 6a_0$ ,  $\langle r^2 \rangle_{2s} = 42a_0^2$ ,  $D = 6a_0^2$ ,  $\langle r^n \rangle_{2s} = \frac{a_0^n}{8} (4 + 3n + n^2) \Gamma(n+3)$ ,  $r_{\text{н.в.}} = 2a_0$ ,  $\langle U \rangle_{2s} = -\frac{e^2}{4a_0}$ ,  $\langle T \rangle_{2s} = \frac{e^2}{8a_0}$ ;

2p-состояние:  $\psi_{210} = \sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} \frac{r}{2a_0} \exp(-\frac{r}{2a_0}) \cos \theta$ ,  $\langle r \rangle_{2p} = 5a_0$ ,  $\langle r^2 \rangle_{2p} = 30a_0^2$ ,  $D = 5a_0^2$ ,  $\langle r^n \rangle_{2p} = \frac{a_0^n}{24} \Gamma(n+5)$ ,  $r_{\text{н.в.}} = 4a_0$ ,  $\langle U \rangle_{2p} = -\frac{e^2}{4a_0}$ ,  $\langle T \rangle_{2p} = \frac{e^2}{8a_0}$ .

**10.10.** Волновые функции, уровни энергии, потенциал ионизации и другие характеристики системы для позитрония аналогичны атому водорода, с той лишь разницей, что вместо массы электрона нужно использовать приведенную массу, для позитрония она равна  $m_e/2$ .

**11.1.**  $\langle x(t) \rangle = x_0 + p_0 t / m$ ,  $D_x(t) = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{\hbar^2 t^2}{a^4 m^2} \right)$ ,  $\langle p(t) \rangle = p_0$ ,  $D_p(t) = \hbar^2 / 2a^2$ .

**11.2.**  $\psi(x, t) = 0,8 \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_1 t\right) \psi_1(x) + 0,6 \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_2 t\right) \psi_2(x)$ .

**11.3.**  $\langle x(t) \rangle = 0$ ,  $D_x(t) = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 3 + \sqrt{(n+1)(n+2)} \sin(2\omega t))$ ,  $\langle p(t) \rangle = 0$ ,  $D_p(t) = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 3 - \sqrt{(n+1)(n+2)} \sin(2\omega t))$ ,  $\langle E(t) \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} (2n + 3)$ ,  $D_E(t) = \hbar^2 \omega^2$ .

**11.4.**  $\langle x(t) \rangle = A \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos(\omega t + \phi)$ ,  $D_x(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}$ , где  $z = Ae^{i\phi}$ .

**11.5.**  $\hat{x}^{(s)} = x \cos \omega t - \frac{i\hbar}{m\omega} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial x}$ ;  $\hat{p}^{(s)} = -m\omega \sin \omega t - i\hbar \cos \omega t \frac{\partial}{\partial x}$ ,  
 $\hat{x}^{(I)} = \exp(iH^{(s)}t/\hbar)x \exp(-iH^{(s)}t/\hbar)$ ,  $\hat{p}^{(I)} = \exp(iH^{(s)}t/\hbar)(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \times$   
 $\times \exp(-iH^{(s)}t/\hbar)$ .

**11.6.**  $\langle v \rangle_{\psi(t)} = -\sqrt{\frac{\hbar \omega}{2m}} \sin \omega t$ .

**11.7.** Интегралами движения являются операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{K}$ .

**11.8.**  $R = m^2 V_0^2 / (\hbar^4 k^2 + m^2 V_0^2)$ ,  $D = \hbar^4 k^2 / (\hbar^4 k^2 + m^2 V_0^2)$ , где  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,  $E$  – энергия налетающей частицы.

**11.9.**  $D = \left( 1 + \frac{U_0^2}{4E(E + U_0)} \sin^2 \left( a \sqrt{\frac{2m(E + U_0)}{\hbar^2}} \right) \right)^{-1}$ ,  $R = (1 - D)$ ,

отражение не будет происходить при  $D = 1$ , т.е. при  $E = \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 - U_0 \right)$ , где  $n$  – натуральные числа, такие что  $E > 0$ .

**11.10.**  $D = \frac{32}{19 - 40 \sinh 4\pi + 45 \cosh 4\pi} \approx 4,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $R = 1 - D \approx 0,999955$ .

**11.11.**  $P = \exp\left(-\frac{4\pi Z' e^2}{\hbar v_\alpha}\right)$ , где  $v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{M_\alpha}}$ ;  $t_{1/2} = \ln 2 / v_\alpha P$ .

**11.12.**  $\langle x(t) \rangle_\psi = p_0 t / m - eEt^2 / m$ .

**11.15.** Пусть  $\hat{A}^{(S)} \left| \psi_i^{(S)} \right\rangle = a_i^{(S)} \left| \psi_i^{(S)} \right\rangle$ . Переход от представления Шредингера к любым другим представлениям осуществляется при помощи унитарных преобразований. Рассмотрим унитарное преобразование, задаваемое оператором  $\hat{U}$ :

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{U} \hat{A}^{(S)} \hat{U}^\dagger \\ \left| \tilde{\psi}_i \right\rangle = \hat{U} \left| \psi_i^{(S)} \right\rangle \end{cases},$$

где  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = I$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{A}|\tilde{\psi}_i\rangle &= \hat{U}\hat{A}^{(S)}\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi_i^{(S)}\rangle = \hat{U}\hat{A}^{(S)}|\psi_i^{(S)}\rangle = \hat{U}a_i^{(S)}|\psi_i^{(S)}\rangle = \\ &= a_i^{(S)}\hat{U}|\psi_i^{(S)}\rangle = a_i^{(S)}|\tilde{\psi}_i\rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**11.16.** Решение этой задачи почти аналогично решению задачи **11.15**. Пусть  $[\hat{A}^{(S)}, \hat{B}^{(S)}] = \hat{C}^{(S)}$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \hat{U}\hat{C}^{(S)}\hat{U}^\dagger = \hat{U}[\hat{A}^{(S)}, \hat{B}^{(S)}]\hat{U}^\dagger = \hat{U}(\hat{A}^{(S)}\hat{B}^{(S)} - \hat{B}^{(S)}\hat{A}^{(S)})\hat{U}^\dagger = \\ &= \hat{U}\hat{A}^{(S)}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{B}^{(S)}\hat{U}^\dagger - \hat{U}\hat{B}^{(S)}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{A}^{(S)}\hat{U}^\dagger = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**12.1. б)** Запишем любой диагональный матричный элемент в базисе  $\{|n\rangle\}$ :  $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \langle n|\psi\rangle(\langle n|\psi\rangle)^* = |\langle n|\psi\rangle|^2 \geq 0$ . Искомая вероятность есть  $w_n = |\langle n|\psi\rangle|^2$ . Дальнейшее доказательство не вызывает особых трудностей. Самостоятельно проверьте, что в силу утверждений пункта **в)**, для вероятностей выполняется естественное условие нормировки  $\sum_n w_n = 1$ .

**в)** Это свойство матрицы плотности можно доказывать разными способами. Например, воспользуемся основным свойством следа  $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ . Тогда:  $\text{Tr}\hat{\rho} = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}(\langle\psi||\psi\rangle) = \text{Tr}(\langle\psi|\psi\rangle) = \text{Tr}(1) = 1$ . Имеется и более формальное доказательство. Выберем некоторый базис  $\{|n\rangle\}$ . В этом базисе

$$\begin{aligned}\text{Tr}\hat{\rho} &= \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \\ &= \langle\psi|\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{1}_n|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1.\end{aligned}$$

д) Идея доказательства аналогична той, что использовалась в пункте в). Можно воспользоваться основным свойством следа. Тогда формулу проще доказывать справа налево. А можно записать среднее физической величины в некотором базисе  $\{|n\rangle\}$ .

**12.2.** Необходимо записать матрицу плотности, отвечающую вектору состояния:  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$ . Для этого вспомним, что если  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |n_i\rangle$ , где  $|n_i\rangle$  – базисные вектора, то элементы матрицы плотности  $\hat{\rho}$  будут равны  $\rho_{jj'} = c_j c_{j'}^*$ . Причем индекс  $j$  нумерует строки искомой матрицы, а индекс  $j'$  – столбцы. Тогда:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta \sin\theta e^{i\phi} & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

**12.3.** Эта задача решается аналогично задаче **12.2**, но имеет гораздо больше практических приложений.

а) Согласно решению задачи **9.3**, спинор, отвечающий проекции спина  $+1/2$  имеет вид:

$$\chi_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Тогда ему отвечает матрица плотности

$$\hat{\rho}_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

б) Аналогично, спинор, отвечающий проекции спина  $-1/2$  имеет вид:

$$\chi_-(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{\rho}_-(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

**12.4.** Доказательства свойств матрицы плотности смешанных состояний мало отличаются от доказательства свойств матрицы плотности чистых состояний. Для решения задачи проще всего перейти в представление, составленное из собственных векторов  $|\rho_k\rangle$  и собственных значений  $\rho_k$  матрицы плотности  $\hat{\rho}$ .

**12.5.** б) состояние смешанное, поскольку  $\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{1}{2} < 1$ ;

в) собственные значения удовлетворяют уравнению

$$\det(\hat{\rho} - \rho \hat{1}) = -\rho(\rho - 1/2)^2 = 0.$$

Отсюда находим двукратно вырожденное собственное значение  $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$  и невырожденное собственное значение  $\rho_3 = 0$ . Один из возможных наборов собственных векторов, отвечающих вырожденному собственному значению  $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$  есть:

$$|\rho_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |\rho_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что из линейных комбинаций  $|\rho_1\rangle$  и  $|\rho_2\rangle$  можно построить другие пары собственных векторов. Для невырожденного собственного значения  $\rho_3 = 0$  собственный вектор имеет вид:

$$|\rho_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

г)  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\rho_1\rangle \langle \rho_1| + |\rho_2\rangle \langle \rho_2|)$ .



**12.6.** Найдем, например,  $\langle S_x \rangle_\rho$ . Известно, что для  $S = 1$  в базисе задачи **12.5** оператор  $\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{S}_x \hat{\rho}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично  $\langle S_y \rangle_\rho = \langle S_z \rangle_\rho = 0$ . Таким образом, данная матрица плотности описывает неполяризованное состояние частицы со спином  $S = 1$ . Если хоть одно из средних значений оказалось бы ненулевым, то частица оказалась бы поляризованной.

**12.7.** Матрица  $\hat{\rho}$  не является матрицей плотности, поскольку  $\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{3}{2} > 1$ . Вопрос о чистом или смешанном состоянии отпадает сам собой.

**12.8. а)** Чтобы  $\langle S_z \rangle_\rho \neq 0$  достаточно положить  $\rho_{11} \neq \rho_{33}$ . Необходимо следить за тем, чтобы при таком изменении выполнялось условие  $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ . Например,

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

**б)** Задача будет решена, если  $\rho_{12} \neq \rho_{23}$ . При этом надо помнить, что полученная матрица должна удовлетворять условиям  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$  и  $\text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1$ . Например,

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-i}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{i}{16} & \frac{1}{2} & \frac{i}{32} \\ \frac{1}{4} & \frac{-i}{32} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

**12.9.** Искомая матрица – это матрица размерности  $2 \times 2$ . Любая подобная матрица может быть разложена по базису, состоящему из единичной матрицы  $\hat{1}$  и матриц Паули  $\vec{\sigma}$ , то есть  $\hat{\rho} = a\hat{1} + (\vec{b}\vec{\sigma})$  с некоторыми, вообще говоря, комплексными коэффициентами  $a$  и  $\vec{b}$ . Учитывая эрмитовость матрицы плотности (свойство а) из задач 12.1 и 12.4) заключаем, что коэффициенты  $a$  и  $\vec{b}$  – действительные. Учитывая свойство в) матриц плотности в задачах 12.1 и 12.4, можем написать  $1 = \text{Tr}\hat{\rho} = a\text{Tr}\hat{1} = 2a$ . То есть  $a = 1/2$ . Выразим вектор  $\vec{b}$  через вектор поляризации  $\vec{p}$  как  $\vec{b} = \vec{p}/2$ . Тогда по свойству д) вектор поляризации связан со средним значением спина электрона  $\langle \vec{S} \rangle_\rho$  следующим образом:  $\vec{p} = 2 \langle \vec{S} \rangle_\rho$ .

**12.10.** Учитывая явный вид матриц Паули, получаем:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & 1 - p_3 \end{pmatrix}.$$

**12.11.** По свойству г) задач 12.1 и 12.4 имеем:

$$1 \geq \text{Tr}\hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} (\text{Tr}\hat{1} + 2 \text{Tr}(\vec{p}\vec{\sigma}) + \text{Tr}(\vec{p}\vec{\sigma})^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} |\vec{p}|^2 \text{Tr}\hat{1} = \frac{1}{2} (1 + |\vec{p}|^2),$$

откуда немедленно следует утверждение задачи. Равенство достигается только для чистых состояний.

**12.13.**  $\vec{p} = 2 \langle \vec{S} \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{\rho}\vec{\sigma}) = (1/2, 0, 1/2)$ . Поскольку  $|\vec{p}|^2 = 1/2 < 1$ , то состояние смешанное.

**12.15.** Используя свойство д) из задач 12.1 и 12.4 и явный вид матрицы плотности для  $s = 1/2$  из задачи 12.10, после простых вычислений получаем:

$$\vec{p} = (1/2, 0, 0) \text{ и } \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Состояние является смешанным, поскольку}$$

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 3/4 < 1 \text{ или } |\vec{p}|^2 = 1/4 < 1.$$

**12.16.**  $\hat{\rho} = |C_1|^2 \hat{\rho}_1 + |C_2|^2 \hat{\rho}_2 + \sqrt{|C_1|^2 |C_2|^2} \frac{\hat{\rho}_1 \hat{P}_0 \hat{\rho}_2 + \hat{\rho}_2 \hat{P}_0 \hat{\rho}_1}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{P}_0 \hat{\rho}_2 \hat{P}_0)}}$ , где  $\hat{P}_0$  – про-

извольный проекционный оператор, который играет роль относительной фазы между коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$  в суперпозиции для вектора состояния  $|\psi\rangle$ .

Чтобы доказать справедливость данной формулы, нужно проверить, что матрица плотности  $\hat{\rho}$  удовлетворяет всем свойствам матрицы плотности чистого состояния.

**12.17.** Пусть  $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ . Проекционный оператор в интервале спектра  $a \in \left[ a_0 - \frac{\Delta_a}{2}, a_0 + \frac{\Delta_a}{2} \right]$  можно записать как

$$\hat{P}_{\Delta_a} = \int_{a_0 - \frac{\Delta_a}{2}}^{a_0 + \frac{\Delta_a}{2}} da |a\rangle \langle a|.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$w(\Delta_a) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_{\Delta_a}) = \int_{a_0 - \frac{\Delta_a}{2}}^{a_0 + \frac{\Delta_a}{2}} da \langle a | \hat{\rho} | a \rangle.$$

**12.18.** Если наблюдаемые  $A$  и  $B$  одновременно измеримы, то соответствующие им эрмитовы операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  имеют общую систему собственных векторов  $|ab\rangle$ . В этом случае проекционный оператор записывается как:

$$\hat{P}_{\Delta_a, \Delta_b} = \int_{a_0 - \frac{\Delta_a}{2}}^{a_0 + \frac{\Delta_a}{2}} da \int_{b_0 - \frac{\Delta_b}{2}}^{b_0 + \frac{\Delta_b}{2}} db |ab\rangle \langle ab|,$$

что приводит к следующей вероятности:

$$w(\Delta_a, \Delta_b) = \int_{a_0 - \frac{\Delta_a}{2}}^{a_0 + \frac{\Delta_a}{2}} da \int_{b_0 - \frac{\Delta_b}{2}}^{b_0 + \frac{\Delta_b}{2}} db \langle ab | \hat{\rho} | ab \rangle.$$

**12.19.** Принимая во внимание определение среднего и почти дословно повторяя алгоритм решения задач 12.17 и 12.18, получаем:

$$\langle B \rangle_\rho = \int_{a_0 - \frac{\Delta a}{2}}^{a_0 + \frac{\Delta a}{2}} da \int_{-\infty}^{+\infty} db b \langle a b | \hat{\rho} | a b \rangle.$$

Заметим, что обобщение полученного выше результата для  $\langle B \rangle_\rho$  на случай, когда  $b \in \left[ b_0 - \frac{\Delta b}{2}, b_0 + \frac{\Delta b}{2} \right]$  не представляет никаких трудностей.

**12.20.** Рассмотрим наблюдаемую  $F$ , которая относится *только* к подсистеме  $A$ . Тогда:  $\langle F \rangle_\rho = \langle F \rangle_{\rho_A} \Rightarrow \text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho}_A)$ . Пусть  $\{|a_i\rangle\}$  – базис в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_A$  подсистемы  $A$  и  $\{|b_j\rangle\}$  – базис в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_B$  подсистемы  $B$ . Базис для всей системы состоит из векторов вида  $|n_{ij}\rangle = |a_i\rangle|b_j\rangle$ . Тогда  $\text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho}) = \sum_{i,j} \langle n_{ij} | \hat{F}\hat{\rho} | n_{ij} \rangle = \sum_i \sum_j \langle b_j | \langle a_i | \hat{F}\hat{\rho} | a_i \rangle | b_j \rangle = \sum_j \sum_i \sum_k \langle a_i | \hat{F} | a_k \rangle \langle b_j | \langle a_k | \hat{\rho} | a_i \rangle | b_j \rangle$ . С другой стороны,  $\text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho}_A) = \sum_i \sum_k \langle a_i | \hat{F} | a_k \rangle \langle a_k | \hat{\rho}_A | a_i \rangle$ . Сравнивая обе формулы для  $\text{Tr}(\hat{F}\hat{\rho})$ , находим:  $\langle a_k | \hat{\rho}_A | a_i \rangle = \langle a_k | \sum_j \langle b_j | \hat{\rho} | b_j \rangle | a_i \rangle$ , то есть  $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}$ , что и требовалось доказать.

**12.21.** Матрица плотности частицы “1” в базисе

$$\left| s^{(1)} = 1/2, s_z^{(1)} = +1/2 \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| s^{(1)} = 1/2, s_z^{(1)} = -1/2 \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

выглядит следующим образом:  $\hat{\rho}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Это матрица плотности смешанного состояния, поскольку  $\text{Tr} \hat{\rho}^{(1)2} < 1$ . Таким образом, если в чистом состоянии с суммарным  $S = 0$  для частиц “1” и “2” рассматривать ТОЛЬКО частицу “1”, то эта частица находится в смешанном состоянии и не описывается

волновой функцией! Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для частицы “2”.

**12.22.** Решение этой достаточно трудной задачи можно найти в статье: В.В. Додонов, В.И. Манько, «Обобщение соотношений неопределенностей в квантовой механике», *Труды ФИАН им. П.Н.Лебедева*, т. **183**, с. 5–70 (1987) на страницах 14 – 18.

**12.23.** Такая матрица имеет размерность  $(2s + 1) \times (2s + 1)$ . Если учесть, что каждый элемент матрицы может быть комплексным числом, то число свободных параметров равно  $2(2s+1)^2$ . Условие эрмитовости для матрицы плотности уменьшает это число в два раза. Свойство в) задач 12.1 и 12.4 уменьшает число свободных параметров еще на единицу. Таким образом окончательное число свободных параметров есть:  $(2s + 1)^2 - 1 = 4s(s + 1)$ . Для  $s = 1/2$  получаем  $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$ , что, естественно, совпадает с числом компонент вектора поляризации  $\vec{p}$  из задачи **12.9**.

**12.24.** Для получения квантового уравнения Лиувилля проще всего начать с матрицы плотности чистого состояния. Беря производную  $\frac{\partial |\psi^{(S)}\rangle\langle\psi^{(S)}|}{\partial t}$  и пользуясь уравнениями Шредингера для  $\langle\psi^{(S)}|$  и  $|\psi^{(S)}\rangle$ , получаем искомый результат.

Далее замечаем, что в матрице плотности для смешанного состояния вероятности  $W_\ell$  от времени не зависят. Принимая во внимание линейность уравнения эволюции, получаем искомый результат для эволюции матрицы плотности смешанного состояния.

**12.25.** Уравнение имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(\vec{p}, \vec{p}', t)}{\partial t} = (E_p - E_{p'}) \rho(\vec{p}, \vec{p}', t),$$

где  $E_p = \vec{p}^2/2m_0$ . Решение данного уравнения:

$$\rho(\vec{p}, \vec{p}', t) \sim e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p'} - E_p)t}.$$

Коэффициент пропорциональности зависит от начальных условий.

**12.26.** В представлении Гейзенберга вектора состояния от времени не зависят. Следовательно, не зависит от времени и матрица плотности. Поэтому:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(H)}}{\partial t} = 0.$$

Для нахождения уравнения эволюции для матрицы плотности в представлении взаимодействия разобьем гамильтониан  $\hat{H}$  на сумму «невозмущенного» гамильтониана  $\hat{H}_0$  и «взаимодействия»  $\hat{V}$ . Тогда почти дословно повторяя вывод уравнения эволюции для матрицы плотности в представлении Шредингера, для матрицы плотности в представлении взаимодействия получаем следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{V}^{(I)}, \hat{\rho}^{(I)}(t)],$$

где  $\hat{V}^{(I)}$  – оператор «взаимодействия» в представлении взаимодействия.

**12.27. а)** Согласно условию, необходимо построить представление взаимодействия с невозмущенным гамильтонианом  $\hat{H}_0 = \hat{H}_A$  и гамильтонианом взаимодействия  $\hat{V} = \hat{H}_B + \hat{V}_{AB}$ . Будем обозначать такое представление индексом  $(I, B)$ . Учтя, что гамильтониан  $\hat{H}_A^{(S)}$  явно от времени не зависит, можно написать следующие формулы перехода между представлением Шредингера  $(S)$  и представлением  $(I, B)$ :

$$\begin{cases} |\psi^{(I, B)}(t)\rangle = e^{i(t-t_0)\hat{H}_A/\hbar} |\psi^{(S)}(t)\rangle \\ \hat{F}^{(I, B)}(t) = e^{i(t-t_0)\hat{H}_A/\hbar} \hat{F}^{(S)}(t_0) e^{-i(t-t_0)\hat{H}_A/\hbar} \end{cases}.$$

Мы учли, что  $\hat{H}_A^{(S)} \equiv \hat{H}_A^{(I, B)} = \hat{H}_A$ . Переход от представления Гейзенберга  $(H)$  к представлению  $(I, B)$  задается системой:

$$\begin{cases} |\psi^{(I, B)}(t)\rangle = \hat{S}_B(t, t_0) |\psi^{(H)}(t_0)\rangle \\ \hat{F}^{(I, B)}(t) = \hat{S}_B(t, t_0) \hat{F}^{(H)}(t) \hat{S}_B^\dagger(t, t_0) \end{cases},$$

где оператор эволюции  $\hat{S}_B(t, t_0)$  удовлетворяет очевидному уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}_B(t, t_0)}{\partial t} = \left( \hat{H}_B^{(I, B)}(t) + \hat{V}_{AB}^{(I, B)}(t) \right) \hat{S}_B(t, t_0)$$

с начальным условием  $\hat{S}_B(t_0, t_0) = \hat{1}$ . Тогда эволюция матрицы плотности системы задается следующим образом:

$$\hat{\rho}^{(I, B)}(t) = \hat{S}_B(t, t_0) \hat{\rho}^{(H)}(t_0) \hat{S}_B^\dagger(t, t_0) = \hat{S}_B(t, t_0) \hat{\rho}_0 \hat{S}_B^\dagger(t, t_0).$$

**б)** Эту задачу удобно решать в представлении взаимодействия  $(I, B)$ , динамика которого была изучена в предыдущем пункте. Сопоставим наблюдаемой  $F_B$  эрмитов оператор  $\hat{F}_B$  такой, что:  $\hat{F}_B |f_{Bi}\rangle = f_{Bi} |f_{Bi}\rangle$ . И введем проекционные операторы  $\hat{P}_i^{(F_B)} = |f_{Bi}\rangle \langle f_{Bi}|$  на чистые состояния  $|f_{Bi}\rangle$ . Тогда по формуле фон Неймана матрица плотности системы сразу после измерения (то есть в момент времени  $t_1 + \Delta t$ , где  $\Delta t \rightarrow 0$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 + \Delta t) &= \frac{\hat{P}_{n'}^{(F_B)} \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) \hat{P}_{n'}^{(F_B)}}{\text{Tr}_A \left( \text{Tr} \left( \hat{P}_{n'}^{(F_B)} \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) \right) \right)} = \\ &= \frac{\hat{P}_{n'}^{(F_B)} \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) \hat{P}_{n'}^{(F_B)}}{\text{Tr}_A \left( \langle f_{Bn'} | \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) | f_{Bn'} \rangle \right)}. \end{aligned}$$

Эволюция матрицы плотности от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\hat{\rho}^{(I, B)}(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{S}_B(t_2, t_1 + \Delta t) \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 + \Delta t) \hat{S}_B^\dagger(t_2, t_1 + \Delta t).$$

Тогда искомая вероятность запишется в виде:

$$\begin{aligned} w(t_2, f_{Bk'} | t_1, f_{Bn'}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Tr}_A \left( \langle f_{Bk'} | \hat{S}_B(t_2, t_1 + \Delta t) | f_{Bn'} \rangle \right. \\ &\left. \frac{\langle f_{Bn'} | \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) | f_{Bn'} \rangle}{\text{Tr}_A \left( \langle f_{Bn'} | \hat{\rho}^{(I, B)}(t_1 - \Delta t) | f_{Bn'} \rangle \right)} \langle f_{Bn'} | \hat{S}_B^\dagger(t_2, t_1 + \Delta t) | f_{Bk'} \rangle \right). \end{aligned}$$

Из полученной формулы ясно, почему в данной задаче используется представление взаимодействия  $(I, B)$ . В этом представлении проще вычислять матричные элементы вида  $\langle f_{Bk'} | \hat{S}^{\dots}(t, t_0) | f_{Bn'} \rangle$ .

**12.28.** Данная задача решается аналогично задаче **12.27**. Только в этом случае удобно использовать обычное представление взаимодействия  $(I)$  с невозмущенным гамильтонианом  $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_B$  и гамильтонианом взаимодействия  $\hat{V} = \hat{V}_{AB}$ . Тогда искомая вероятность запишется в виде:

$$w(t_2, f_{Bk'} | t_1, f_{An'}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Tr}_A \left( \langle f_{Bk'} | \hat{S}(t_2, t_1 + \Delta t) | f_{An'} \rangle \frac{\langle f_{An'} | \hat{\rho}^{(I)}(t_1 - \Delta t) | f_{An'} \rangle}{\text{Tr}_B (\langle f_{An'} | \hat{\rho}^{(I)}(t_1 - \Delta t) | f_{An'} \rangle)} \langle f_{An'} | \hat{S}^\dagger(t_2, t_1 + \Delta t) | f_{Bk'} \rangle \right).$$

**12.29.** Аналогично выводу нестационарного уравнения Шредингера для эрмитового гамильтониана, получаем:

$$\text{а) } i\hbar \frac{\partial |\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial t} = \left( \hat{H}_0 - \frac{i}{2} \hat{\Gamma} \right) |\psi^{(S)}(t)\rangle;$$

$$\text{б) } i\hbar \frac{\partial \langle \psi^{(S)}(t) |}{\partial t} = \langle \psi^{(S)}(t) | \left( \hat{H}_0 + \frac{i}{2} \hat{\Gamma} \right);$$

$$\text{в) } i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}(t)}{\partial t} = \left[ \hat{H}_0, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right] - \frac{i}{2} \left\{ \hat{\Gamma}, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right\}.$$

Поясним, почему гамильтониан  $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2} \hat{\Gamma}$  можно использовать для описания распадов. Собственные значения гамильтониана есть  $E_0^{(n)} - \frac{i}{2} \Gamma^{(k)}$ . Тогда волновую функцию, например, в координатном представлении, можно записать в виде  $\psi_{n,k}(t, \vec{r}) = A e^{-i(E_0^{(n)} t - \vec{p} \vec{r})/\hbar} e^{-\Gamma^{(k)} t/2\hbar}$ . В этом случае зависимость вероятности от времени  $w_{n,k}(t) \sim |\psi_{n,k}(t, \vec{r})|^2 = |A|^2 e^{-\Gamma^{(k)} t/\hbar}$  воспроизводит закон радиоактивного распада.

**12.30.** Прежде всего заметим, что утверждение теоремы достаточно нетривиально. В самом деле, если в подсистеме “A” имеется какой-либо базис  $\{|a_i\rangle\}$ , а в подсистеме “B” другой базис  $\{|\tilde{b}_j\rangle\}$ , то самое общее разложение состояния



$|\psi\rangle$  по базису обеих подсистем будет иметь вид:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell} \sum_j \psi_{\ell j} |a_{\ell}\rangle |\tilde{b}_j\rangle = \sum_{\ell} |a_{\ell}\rangle |\beta_{\ell}\rangle,$$

где

$$|\beta_{\ell}\rangle = \sum_j \psi_{\ell j} |\tilde{b}_j\rangle.$$

А ргіогі совсем неясно, почему можно выбрать  $\langle \beta_{\ell} | \beta_{\ell'} \rangle \sim \delta_{\ell \ell'}$ .

Покажем, что такой выбор возможен. Пусть  $\{|a_{\ell}\rangle\}$  – базис, в котором матрица плотности  $\hat{\rho}_A$  подсистемы “A” имеет диагональный вид, то есть

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\ell} W_{\ell} |a_{\ell}\rangle \langle a_{\ell}|.$$

Матрицу плотности  $\hat{\rho}_A$  также можно получить, если взять частичный след от матрицы плотности  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$  всей микросистемы по квантовым числам подсистемы “B”. В этом случае имеем:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho} = \text{Tr}_B \left( \sum_{\ell \ell'} |a_{\ell}\rangle |\beta_{\ell}\rangle \langle a_{\ell'}| \langle \beta_{\ell'}| \right) = \sum_{\ell \ell'} \langle \beta_{\ell'} | \beta_{\ell} \rangle |a_{\ell}\rangle \langle a_{\ell'}|.$$

Сравнивая оба выражения для матрицы плотности  $\hat{\rho}_A$  приходим к выводу, что  $\langle \beta_{\ell'} | \beta_{\ell} \rangle = W_{\ell} \delta_{\ell \ell'}$ . То есть состояния  $|\beta_{\ell}\rangle$  и  $|\beta_{\ell'}\rangle$  действительно можно выбрать ортогональными! Теперь введем ортонормированный базис  $|b_{\ell}\rangle = |\beta_{\ell}\rangle / \sqrt{W_{\ell}}$ . Теорема Шмидта доказана.

**12.31.** Для микросистемы, которая состоит из трех подсистем, Рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |_{+}^{(A)}\rangle \left( |_{+}^{(B)}\rangle |_{+}^{(C)}\rangle + |_{-}^{(B)}\rangle |_{-}^{(C)}\rangle \right) \right).$$

Тогда

$$\hat{\rho}^{(A)} = \text{Tr}_B \text{Tr}_C \left( |\psi\rangle \langle \psi| \right) = |_{+}^{(A)}\rangle \langle_{+}^{(A)}|.$$

Аналогично

$$\hat{\rho}^{(B)} = \text{Tr}_A \text{Tr}_C \left( |\psi\rangle\langle\psi| \right) = \frac{1}{2} \left( \left| +^{(B)} \right\rangle \left\langle +^{(B)} \right| + \left| -^{(B)} \right\rangle \left\langle -^{(B)} \right| \right).$$

и

$$\hat{\rho}^{(C)} = \text{Tr}_A \text{Tr}_B \left( |\psi\rangle\langle\psi| \right) = \frac{1}{2} \left( \left| +^{(C)} \right\rangle \left\langle +^{(C)} \right| + \left| -^{(C)} \right\rangle \left\langle -^{(C)} \right| \right).$$

Таким образом собственные значения матрицы  $\hat{\rho}^{(A)}$  есть  $W_\ell = \{1, 0\}$ , а собственные значения матриц  $\hat{\rho}^{(B)}$  и  $\hat{\rho}^{(C)}$  равны  $W_\ell = \{1/2, 1/2\}$ . Это разные наборы собственных значений, из которых, очевидно, нельзя построить суммы вида  $\sum_\ell \sqrt{W_\ell} \left| \ell^{(A)} \right\rangle \left| \ell^{(B)} \right\rangle \left| \ell^{(C)} \right\rangle$ , где  $\ell = \{+, -\}$ .

Таким образом, стоит иметь ввиду, что для трех и более подсистем разложения Шмидта в общем виде не существует.

**13.1.** На самом деле, никакого парадокса в рассуждении нет, поскольку две разлетающиеся частицы **B** и **C** имеют *одну общую* волновую функцию (вспомните, что частицы **B** и **C** появились в результате распада начальной частицы **A**). Эта общая волновая функция *не факторизуется* (то есть не разделяется) на произведение волновых функций отдельных независимых и невзаимодействующих частиц (в литературе частицы **B** и **C** получили название *запутанных*). Измерение, проводимое над любой из частиц **B** или **C**, *моментально* меняет волновую функцию *всей системы* и разрушает корреляцию. Например, точное измерение координаты частицы **C**, в полном согласии с соотношением неопределенности Гейзенберга, мгновенно делает импульс  $\vec{p}_C$  этой частицы абсолютно произвольным и нарушает закон сохранения импульса  $\vec{p}_B + \vec{p}_C = 0$  (поскольку квантовая система **BC** больше не является замкнутой). Следовательно, измерение импульса частицы **B** будет произведено уже над **другим** состоянием системы (*факторизованным*, в котором частицы **B** и **C** являются *абсолютно независимыми* и описываются каждое своей волновой функцией, а полное состояние системы – произведением их волновых функций), сколь бы

быстро оно не выполнялось. И оно не будет иметь никакого отношения к значению импульса частицы **C**. В итоге, мы сколь угодно точно можем измерить лишь импульс частицы **B** и координату частицы **C**, но при этом точное измерение импульса частицы **C** не возможно. Принцип неопределенности Гейзенберга спасен!

Заметим, что приведенное выше рассуждение можно изменить и начать с точного измерения импульса частицы **B**, а не с точного измерения координаты частицы **C**. Проведите такое рассуждение самостоятельно и снова докажите правоту квантовой теории.

**13.2.** В этом эксперименте, как и в задаче **13.1**, никакого парадокса нет, так как система частиц **A** и **B** описывается *общей* спиновой волновой функцией

$$\begin{aligned} & \left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S^{(B)} = \frac{1}{2}, S = 0, S_z = 0 \right\rangle, = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S_z^{(A)} = +\frac{1}{2} \right\rangle \left| S^{(B)} = \frac{1}{2}, S_z^{(B)} = -\frac{1}{2} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S_z^{(A)} = -\frac{1}{2} \right\rangle \left| S^{(B)} = \frac{1}{2}, S_z^{(B)} = +\frac{1}{2} \right\rangle \right), \end{aligned}$$

которая, как легко проверить, не факторизуется на произведение одночастичных спиновых волновых функций. Эта волновая функция была явно построена на лекции в качестве простейшего примера сложения двух ненулевых моментов. Таким образом, частицы *A* и *B* являются *запутанными* по спину. Поэтому, как только в Париже производят измерение проекции спина частицы **A** на ось *z* (например, экспериментатор находит, что  $S_z^{(A)} = +\frac{1}{2}$ ), то спиновая волновая функция системы *AB* мгновенно изменяется (становится равной  $\left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S_z^{(A)} = +\frac{1}{2} \right\rangle \left| S^{(B)} = \frac{1}{2}, S_z^{(B)} = -\frac{1}{2} \right\rangle$ ), а значит, в далеком Пекине измерение будет производиться уже для другой волновой функции, и это измерение проекции спина частицы **B** на ось *x* не будет иметь никакого отношения к первоначальному состоянию системы  $\left| S^{(A)} = \frac{1}{2}, S^{(B)} = \frac{1}{2}, S = 0, S_z = 0 \right\rangle$ . Таким образом, указанный эксперимент опять не позволяет одновременно из-

мерить проекции спина одной и той же частицы на две непараллельные оси и обмануть соотношение неопределенности Гайзенберга. **Квантовая механика спасена!**

**13.3.** Любой вектор в двумерном гильбертовом пространстве можно разложить по базисным состояниям  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , поэтому наиболее общий вид кубита  $|\psi\rangle = \sum w_i |\phi\rangle_i = a|0\rangle + b|1\rangle$ , где  $\sum |w_i|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1$ . Одним из ярких примеров кубита является бифотонная пара: два фотона с одинаковой частотой, но разной поляризацией (или одинаковой поляризацией, но с разными частотами). Такие фотонные пары могут быть получены в результате спонтанного параметрического рассеяния на кристалле с квадратичной нелинейностью, и безусловно, являются запутанными.

**13.4.**  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \alpha\gamma|13\rangle + \beta\delta|24\rangle + \alpha\delta|14\rangle + \beta\gamma|23\rangle$  – реализуется в четырехмерном гильбертовом пространстве.

**13.5.** Состояния Белла

$$|\Psi^{(\pm)}\rangle = \frac{|H_1V_2\rangle \pm |V_1H_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

и

$$|\Phi^{(\pm)}\rangle = \frac{|H_1H_2\rangle \pm |V_1V_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

реализуются в базисе  $|H_1H_2\rangle, |H_1V_2\rangle, |V_1H_2\rangle, |V_1V_2\rangle$ . Состояния Белла являются запутанными.

**13.6.**  $|\psi\rangle = \frac{|H_iV_s\rangle + |V_iV_s\rangle}{\sqrt{2}}$ .

**13.8.** а) Матрица плотности синглетного состояния имеет следующий вид:

$$S_{m\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Матрица плотности смеси других состояний}$$

Белла (“random fraction”) представляет собой смесь синглетной и триплетных

компонент в равных пропорциях  $T_{m\mu\nu} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \delta_{mn} \delta_{\mu\nu}$ . По-

этому матрица плотности состояния Вернера  $\rho_{m\mu\nu} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$\frac{1-x}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Состояние Вернера включает две подсистемы с мат-

рицами плотности  $\rho_{mn}$  и  $\rho_{\mu\nu}$ , поэтому  $\rho_{m\mu\nu} = \sum w_A \rho(A)_{mn} \rho(A)_{\mu\nu}$ , где  $\sum w_A = 1$ . Проведем транспонирование матрицы плотности одной из подсистем, например,  $\rho(A)_{mn}$ , тогда для матрицы плотности всей системы получим

$\sigma_{n\mu m\nu} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-x}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдем собственные

значения  $\sigma_{n\mu m\nu}$ :  $\lambda_1 = \frac{x+1}{4}$ ,  $\lambda_2 = \frac{x+1}{4}$ ,  $\lambda_3 = \frac{x+1}{4}$ ,  $\lambda_4 = \frac{1-3x}{4}$ . Согласно критерию Переса для сепарабельности матрицы плотности всей системы собственные значения матрицы плотности, полученной в результате транспонирования матрицы плотности одной из подсистем, должны быть неотрицательны. В нашем случае это означает, что  $x < 1/3$ . Такое условие является более сильным, чем условие на сепарабельность из неравенства Белла  $x < 1/\sqrt{2}$  или из неравенства для энтропии  $x < 1/\sqrt{3}$  (см. задачу 14.17).

**б)** Матрица плотности состояния Гизина имеет следующий вид:

$$\rho_{\mu\nu\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x|b|^2 & xab^* & 0 \\ 0 & xa^*b & x|a|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}.$$

После транспонирования матрицы плотности одной из подсистем получим

$$\sigma_{\mu\nu\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & 0 & 0 & xab^* \\ 0 & x|b|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x|a|^2 & 0 \\ xa^*b & 0 & 0 & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Переса собственные значения матрицы  $\sigma_{\mu\nu\mu\nu}$  должны быть неотрицательны:  $\lambda_1 = |a|\sqrt{x}$ ,  $\lambda_2 = |b|\sqrt{x}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 + x(2|ab| - 1))$ ,  $\lambda_4 = \frac{1}{2}(1 - x(2|ab| + 1))$ . Отсюда получим, что система Гизина сепарабельна, если выполнено условие  $x < \frac{1}{2|ab|+1}$ .

**13.10.** Согласно решению задачи **12.21**, матрица плотности состояния, которое получит Алиса, имеет вид:

$$\hat{\rho}^{(A)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{1}.$$

Тогда среднее значение проекции спина на ось  $z$ , которое может измерить Алиса при помощи полученных ей частиц,

$$\left\langle S_z^{(A)} \right\rangle_{\rho^{(A)}} = \text{Tr} \left( \hat{\rho}^{(A)} \hat{S}_z^{(A)} \right) = \frac{1}{4} \text{Tr} (\hat{1} \sigma_z) = \frac{1}{4} \text{Tr} (\sigma_z) = 0$$

вообще не зависит от того, какие манипуляции над своими частицами проводит Боб! То есть, передать информацию от Боба к Алисе быстрее скорости света при помощи коррелированных пар частиц нельзя.

**13.11.** Заметим, что теорема Эберхарда относится только к показаниям макроприборов, но не к изменению состояния самой микросистемы. Доказательство теоремы можно найти в статье: Eberhard, P.H. “Bell’s theorem and the different concepts of nonlocality”, *Nuovo Cimento*, **46B**, 392-419 (1978).

**14.4.** Используя результаты пункта в) задачи **12.29**, получаем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \left( \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{\Gamma} \right) + \text{Tr} \left( \hat{\Gamma} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \right) \right).$$

Для замкнутых квантовых систем  $\hat{\Gamma} = 0$ , что приводит к сохранению энтропии в замкнутой системе.

В процессе вычислений могут возникнуть трудности при взятии производной от логарифма оператора. Проще всего данную производную найти, если продифференцировать операторное тождество  $\hat{A} = e^{\ln \hat{A}}$ .

**14.5.**  $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$ . То есть, чистое состояние - это состояние с минимальным значением энтропии. В этом смысле подтверждается один из постулатов квантовой механики, что вектор состояния  $|\psi\rangle$  несет максимально возможную для макроскопического наблюдателя информацию о квантовой системе.

**14.6.** При решении задачи **12.5** было найдено, что данная матрица плотности обладает следующими собственными значениями:  $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$  и  $\rho_3 = 0$ . Напомним, что в практических вычислениях полагают  $0 \cdot \log_2 0 = 0$ . Тогда:  

$$S(\hat{\rho}) = - \sum_{\ell} \rho_{\ell} \ln \rho_{\ell} = - \ln 2 \sum_{\ell} \rho_{\ell} \log_2 \rho_{\ell} = - \ln 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \ln 2 \cdot 1 =$$

$$= 1 \text{ бит} \approx 1,44 \text{ нат.}$$

**14.7.** Согласно решению задачи **12.9**, спиновая матрица плотности спина  $s = 1/2$  имеет вид:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + (\vec{p}\vec{\sigma})) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & 1 - p_3 \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы два собственных значения  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm |\vec{p}|)$ . Поскольку вектор поляризации  $|\vec{p}| \leq 1$ , то  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ , где  $i = \{1, 2\}$ . Энтропия:

$$S(\hat{\rho}) = \ln 2 - \frac{1}{2} (1 + |\vec{p}|) \ln (1 + |\vec{p}|) - \frac{1}{2} (1 - |\vec{p}|) \ln (1 - |\vec{p}|).$$

Если состояние полностью поляризовано, то  $|\vec{p}| = 1$  и  $S = 0$ , что и следовало ожидать для чистого состояния согласно решению задачи **14.5**. Если состояние

неполяризовано, то  $|\vec{p}| = 0$  и  $S = \ln 2$ . Это находится в согласии с результатом задачи **14.3**, поскольку гильбертово пространство спина  $s = 1/2$  имеет размерность  $d = 2$ .

**14.8.** Согласно решению задачи **13.8**, матрица плотности состояния Вернера имеет вид:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & -\frac{x}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{4} & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix},$$

где  $0 \leq x \leq 1$ . Собственные значения этой матрицы  $\lambda_1 = \frac{1+3x}{4}$  и  $\lambda_{2,3,4} = \frac{1-x}{4}$ . Тогда энтропия состояния Вернера равна:

$$S(\hat{\rho}) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}(1-x) \ln(1-x) - \frac{1}{4}(1+3x) \ln(1+3x).$$

При  $x = 1$  энтропия  $S(\hat{\rho}) = 0$ , что соответствует чистому синглетному состоянию. При  $x = 0$  энтропия достигает своего максимального значения  $S(\hat{\rho}) = 2 \ln 2$ , которое отвечает равномерной смеси синглета и триплета. Этот результат находится в согласии с результатом задачи **14.3**, поскольку гильбертово пространство состояний Вернера имеет размерность  $d = 4$ .

**14.18.** Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой Шмидта из Задачи **12.30**.

**14.19.** Доказательство этой теоремы достаточно сложно. Детали можно найти в работе Barnum, H., C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa, and B. Schumacher, *Physical Review Letters*, **76**, p. 2818 (1996).

Хотя точное клонирование квантового состояния невозможно, но приближенное копирование смешанного квантового состояния осуществимо. Это было показано в работе: V. Buzek and M. Hillery, *Physical Review A* **54**, p. 1844 (1996).

**15.4.** 
$$\Delta z = \frac{1}{2} \mu_e g_e \frac{L^2}{kT} \frac{dH}{dz} = 1,3 \text{ см.}$$



**15.5.**  $\frac{dH}{dz} = 2g_{grav}m_e/\mu_0g_e = 10^{-4} \text{ Э/см}$ , где  $g_{grav}$  – ускорение свободного падения,  $g_e$  – гиромагнитное отношение.

**15.6.**  $\frac{dH}{dz} = 2g_{grav}m_{p,n}^2/m_e\mu_0g_{p,n}$ ,  $\left(\frac{dH}{dz}\right)_p = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Э/см}$ ,  $\left(\frac{dH}{dz}\right)_n = 1,6 \cdot 10^2 \text{ Э/см}$ .

**15.7.**  $[\hat{x}_0, \hat{H}] = [\hat{y}_0, \hat{H}] = 0$ ,  $[\hat{x}_0, \hat{y}_0] = -i\hbar c/e\mathcal{H} \hat{1}$ .

**15.10.**  $\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ i \sin \Omega t \end{pmatrix}$ ,  $\langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \sin 2\Omega t$ ,  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \cos 2\Omega t$ ,  $\hat{\sigma}_x^{(H)} = \hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y^{(H)} = \hat{\sigma}_y \cos 2\Omega t + \hat{\sigma}_z \sin 2\Omega t$ ,  $\hat{\sigma}_z^{(H)} = -\hat{\sigma}_y \sin 2\Omega t + \hat{\sigma}_z \cos 2\Omega t$ , где  $\Omega = \mu\mathcal{H}/\hbar = e\mathcal{H}/2mc$  – ларморовская частота.

**15.11.**

$$w_- = \frac{\mathcal{H}_0^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{H}_0^2 - \frac{\hbar\omega}{\mu_0} \mathcal{H}_0 \cos \theta + \left(\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}\right)^2} \sin^2 \left( \frac{\mu_0 t}{\hbar} \sqrt{\mathcal{H}_0^2 - \frac{\hbar\omega}{\mu_0} \mathcal{H}_0 \cos \theta + \left(\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}\right)^2} \right)$$

**16.2.** Воспользовавшись явным видом спинов в сферической системе координат  $(\theta, \varphi)$ , легко показать, что

$$w \left( a_+^{(2)}, b_+^{(1)} \right) = \sin^2 \frac{\theta_a - \theta_b}{2} = \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}.$$

При нахождении максимального нарушения неравенства Вигнера обратите внимание, что из трех углов  $\theta_{ab}$ ,  $\theta_{cb}$  и  $\theta_{ac}$  независимыми являются только два.

**16.6.** Максимальное нарушение неравенств достигается, когда вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  лежат в одной плоскости, например,  $(xz)$ , и  $\theta_{ab} = \theta_{bc} = \theta_{cd} = \pi/8$ , а  $\theta_{ad} = 3\pi/8$  или  $\theta_{ab} = \theta_{bc} = \theta_{cd} = 3\pi/8$ , а  $\theta_{da} = 7\pi/8$ .

**16.7.** Доказательство дано в работе N. Gisin, A. Peres, “Maximal violation of Bell’s inequality for arbitrarily large spin”, Physics Letters A **162**, pp.15-17 (1992).

**16.8.** То есть, в самом общем виде можно показать, что в квантовой механике CHSH-неравенства нарушаются. И максимальная степень этого нарушения

соответствует той, которая в частном случае спинов  $s = 1/2$  уже получена в задаче **16.6**.

Коммутационные условия на операторы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  и  $\hat{D}$ , фактически, являются иной формулировкой теоремы Эберхарда (см. Задачу **13.11**).

Для доказательства теоремы Цирельсона определим оператор

$$\hat{S} = \hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{D} + \hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{D}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} - \hat{S} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{C}^2 + \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{D}^2 \right) - \hat{S} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{C} - \frac{\hat{B} + \hat{D}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{A} - \frac{\hat{B} - \hat{D}}{\sqrt{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\langle S \rangle \geq -2\sqrt{2}.$$

Объединяя оба неравенства в одно при помощи модуля, приходим к доказательству теоремы Цирельсона.

**16.9.** Решение задачи см. в работе Xiao-Hua Wu, Hong-Shi Zong, Hou-Rong Pang, FanWang, “A new Bell inequality for two spin-1 particle system”, Physics Letters A **281**, pp.203–206 (2001).

**16.10.** Несмотря на то, что неравенства Леггетта-Гарга формально можно получить из CHSH-неравенств, но физический и операционный смысл у обоих неравенств совершенно разный. Для проверки нарушения CHSH-неравенств необходимо использовать коррелированные пары частиц и одновременно измерять четыре разные наблюдаемые. В неравенствах Леггетта-Гарга, напро-

тив, измеряется одна наблюдаемая, но в разные моменты времени. Соответствующий пример будет рассмотрен в задаче **16.11**.

Для более детального ознакомления с предметом можно рекомендовать следующие оригинальные статьи:

A. J. Leggett, A. Garg, "Quantum Mechanics versus Macroscopic Realism: Is the Flux There when Nobody Looks?", Phys.Rev.Lett. **54**, p.857 (1985).

C. Emary, N. Lambert and F. Nori, "Leggett-Garg Inequalities", arXiv:1304.5133 [quant-ph] (2014).

**16.11.** В классическом случае  $Q_i = \text{sign}(\cos \omega t_i)$ . Поэтому неравенство Леггетта-Гарга никогда не нарушается. В квантовом случае гамильтониан системы  $\hat{H} = \frac{1}{2}\omega \sigma_x$  и в представлении Гейзенберга  $\hat{Q}_i = \sigma_z(t_i)$ . Тогда  $C_{ij} = \langle \sigma_z(t_i)\sigma_z(t_j) \rangle = \cos \omega(t_i - t_j)$ . Следовательно, в условиях задачи неравенство сводится к выражению  $|3 \cos \alpha - \cos 3\alpha| \leq 2$ , которое нарушается сильнее всего ( $2\sqrt{2} \leq 2$ ), если  $\alpha = \pi/4$ .

**16.12.** Несомненно, удовлетворяют.

**17.1.** а)  $\delta E_n^{(1)} = 0, \delta E_n^{(2)} = -\alpha^2/2m\omega^2,$   
 $|\delta \phi_n^{(1)}\rangle = \alpha^2/2m\omega^2 (\sqrt{n} |n-1\rangle - \sqrt{n+1} |n+1\rangle), n \ll 2m\omega^2/\alpha^2;$

б)  $\delta E_n^{(1)} = 3\hbar^2\beta/4m^2\omega^2 (n^2 + n + 1/2),$   
 $\delta E_n^{(2)} = -15\hbar^2\alpha^2/4m^3\omega^4 (n^2 + n + 11/30),$   
 $|\delta \phi_n^{(1)}\rangle = (\alpha^2\hbar/2m\omega)^{3/2} \cdot 1/\hbar\omega (\sqrt{n(n-1)(n-2)}/3 |n-3\rangle +$   
 $+ 3n^{3/2} |n-1\rangle - 3/2 (n+1)^{3/2} |n+2\rangle - \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}/3 |n+3\rangle).$

**17.2.**  $w_{f0} = \frac{4 \left| \langle f | \hat{F} | 0 \rangle \right|^2}{\hbar} \cdot \frac{\sin^2(1/2(\omega_f - \omega_0 - \omega)t)}{(\omega_f - \omega_0 - \omega)^2}.$

**17.4.**  $w = 2\hbar A^2 |E_0^2|^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - |E_0|/m_0} / (m_0(\hbar\omega)^4),$  где  $E_0 = -\hbar^2 k_0^2 / 2m_0.$

**17.7.**  $\delta E^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|^2} \right].$

**18.1.** Уравнение непрерывности для дираковских полей имеет тот же вид, что и для решений уравнений Шредингера и Клейна-Гордона-Фока, то есть:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}),$$

где

$$\rho(t, \vec{r}) = \psi^\dagger(t, \vec{r})\psi(t, \vec{r}) \quad \text{и} \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = c\psi^\dagger(t, \vec{r}) \vec{\alpha} \psi(t, \vec{r}).$$

**18.4.** Например, найдем связь между  $\hat{C}$  и  $\hat{C}^\dagger$ . Учтем, что матрицы  $\alpha_i$  и  $\beta$  эрмитовы. Тогда:

$$\hat{C}^\dagger = (i\beta\alpha_2)^\dagger = -i\alpha_2^\dagger\beta^\dagger = -i\alpha_2\beta = i\beta\alpha_2 = \hat{C}.$$

Здесь на предпоследнем шаге мы использовали антикоммутиационное соотношение между матрицами  $\alpha_i$  и  $\beta$ . Аналогично

$$\hat{C}^* = \hat{C}^\Gamma = \hat{C}^{-1} = \hat{C}.$$

**18.6.** Для решения задачи надо вспомнить основное свойство следа двух матриц (операторов):  $Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A})$ . Кроме того (докажите самостоятельно),  $Sp\hat{I} = 4$ . Тогда из антикоммутиационных свойств матриц  $\alpha_i$  и  $\beta$  сразу следует, что  $Sp(\alpha_i\alpha_j) = 4\delta_{ij}$ , а  $Sp(\alpha_i\beta) = 0$ .

**19.1.**  $E_1^{(1)} = \frac{2e^2r_0^2}{5a^3} \approx 6 \cdot 10^{-18}$  эрг, где  $a$  – борковский радиус.

**20.3.**

Состояние	$g$ -фактор	Состояние	$g$ -фактор
${}^4P_{1/2}$	8/3	${}^2D_{3/2}$	4/5
${}^3D_1$	1/2	${}^4D_{1/2}$	0
${}^3F_4$	5/4	${}^5F_1$	0
${}^8F_{1/2}$	4	${}^9H_1$	-1

**20.5.**

Состояние	$J$	$J_z$	Угол $\alpha$ между $\vec{J}$ и $\vec{L}$
${}^3P_2$	$\hbar\sqrt{6}$	$0; \pm\hbar; \pm 2\hbar$	$30^\circ$
${}^4D_{1/2}$	$\hbar\sqrt{3}/2$	$\pm\hbar/2$	$45^\circ$
${}^2D_{5/2}$	$\hbar\sqrt{35}/2$	$\pm\hbar/2; \pm 3\hbar/2; \pm 5\hbar/2$	$\cos \alpha = \sqrt{14/15}$
${}^5F_1$	$\hbar\sqrt{2}$	$0; \pm\hbar$	$\cos \alpha = \sqrt{2/3}$

**20.6.** Уровни энергии атома в состояниях  ${}^4D_{1/2}$  и  ${}^2P_{1/2}$  расщепятся на 3 подуровня.

**20.7.**  $\Delta z = \frac{1}{2}\mu_e g_{Li} \frac{L^2}{kT} \frac{dH}{dz} = 1,3 \text{ см.}$

**20.8.**

Атом	Осн. сост.	Число компонент		Атом	Осн. сост.	Число компонент	
		Слабое поле	Сильное поле			Слабое поле	Сильное поле
H	${}^2S_{1/2}$	2	2	C	${}^3P_0$	0	7
He	${}^1S_0$	0	0	N	${}^4S_{3/2}$	4	4
Li	${}^2S_{1/2}$	2	2	O	${}^3P_2$	5	7
Be	${}^1S_0$	0	0	F	${}^2P_{3/2}$	4	5
B	${}^2P_{1/2}$	2	5	Ne	${}^1S_0$	0	0

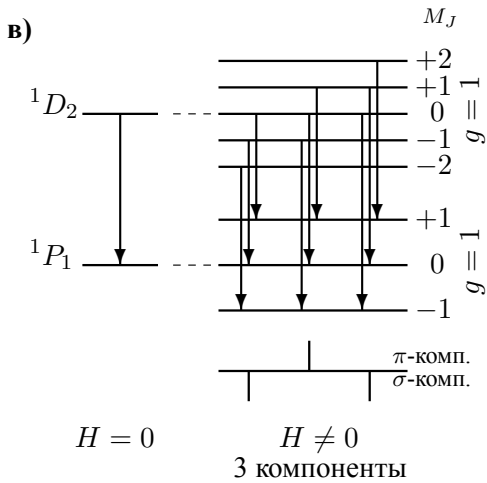
**20.9.**

Атом	Осн. сост.	Число компонент		Атом	Осн. сост.	Число компонент	
		Слабое поле	Сильное поле			Слабое поле	Сильное поле
Na	${}^2S_{1/2}$	2	2	S	${}^3P_0$	0	7
Mg	${}^1S_0$	0	0	Cl	${}^4S_{3/2}$	4	4
Al	${}^2S_{1/2}$	2	2	Ar	${}^3P_2$	5	7
Si	${}^1S_0$	0	0	K	${}^2P_{3/2}$	4	5
P	${}^2P_{1/2}$	2	5	Ca	${}^1S_0$	0	0

**20.10.** Пучок не разделится ( $g = 0$ ).

**20.11.** Пучок разделится на 11 компонент ( $M_L + 2M_S = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$ ).

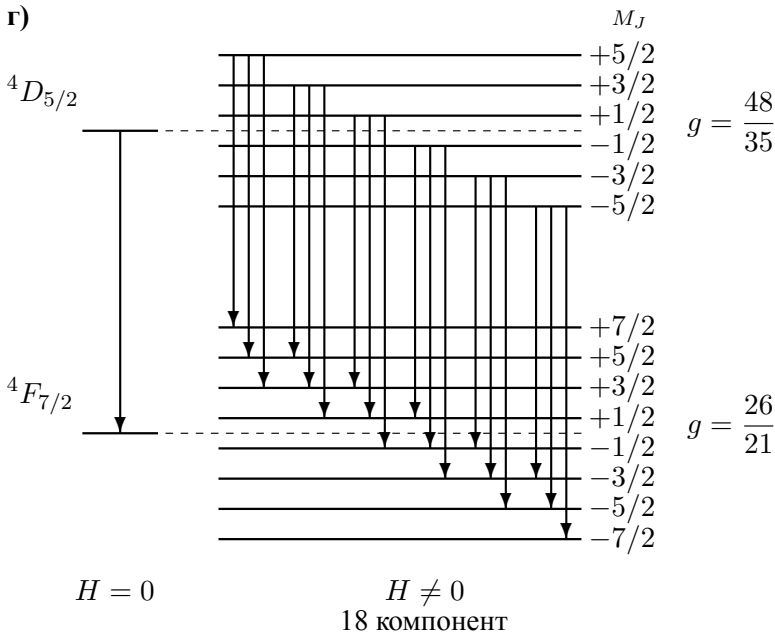




$$\Delta k = \Delta k_0 \left( \frac{(0)1}{1} \right) = 0; \pm \Delta k_0$$

$$\text{где } \Delta k_0 = \frac{\mu_0 H}{2\pi \hbar c}$$

Разрешено 9 переходов, но наблюдается 3 спектральных линии – 3 группы, слившиеся по 3 линии (ср. с пунктом б).

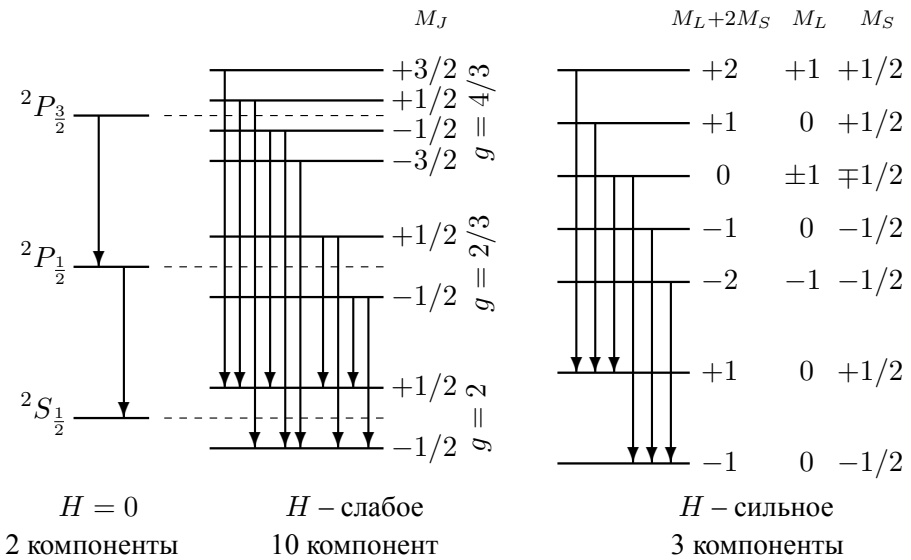


**20.13.** При переходе  ${}^1S_0 \leftrightarrow {}^1P_1$  наблюдается нормальный эффект Зеемана, при всех остальных перечисленных переходах наблюдается аномальный эффект Зеемана. При переходе  ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_0$  наблюдается расщепление спектральной линии на три компоненты, как и при нормальном эффекте Зеемана, но ве-

личина расщепления  $\Omega = 2\mu_B\mathcal{H}/\hbar$  в магнитном поле  $\mathcal{H}$  не совпадает с предсказаниями классической теории ( $\Omega = \mu_B\mathcal{H}/\hbar$ ).

Иногда в литературе под нормальным эффектом Зеемана неверно понимается расщепление на три компоненты независимо от величины расщепления. Однако, исторически к нормальному эффекту Зеемана относят те проявления эффекта, которые можно объяснить из классических соображений, а именно, переходы между синглетными состояниями ( $S = 0$ ).

### 20.14.



**20.15.** По аналогии со спин-орбитальным взаимодействием усреднение следует проводить по состояниям  $|S_e = 1/2, S_p = 1/2, S_H, M_{S_H}\rangle$ . Воспользуемся тем, что  $\hat{S}_H = \hat{S}_e + \hat{S}_p$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{\sigma}_e \vec{\sigma}_p \rangle &= 4 \langle \hat{S}_e \hat{S}_p \rangle = 2 \langle \hat{S}_H^2 - \hat{S}_e^2 - \hat{S}_p^2 \rangle = 2 \left( S_H(S_H + 1) - 2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right) = \\
 &= 2S_H(S_H + 1) - 3.
 \end{aligned}$$



## 21.1.

Конфигурация	Суммарный орбитальный момент
$nsn's$	0
$sp$	1
$sd$	2
$npn'p$	0,1,2
$pd$	1,2,3
$pf$	2,3,4
$df$	1,2,3,4,5

**21.2.** Возможные значения суммарного орбитального момента конфигурации  $pdf$  – 0,1,2,3,4,5,6. Последовательность сложения не влияет на значения суммарного орбитального момента.

## 21.3.

Конфигурация	Термы и состояния		
$sp$	${}^1P_1^o$ ${}^3P_{0,1,2}^o$		
$sd$	${}^1D_2$ ${}^3D_{1,2,3}$		
$pd$	${}^1P_1^o$ ${}^3P_{0,1,2}^o$	${}^1D_2^o$ ${}^3D_{1,2,3}^o$	${}^1F_3^o$ ${}^3F_{2,3,4}^o$
$pf$	${}^1D_2$ ${}^3D_{1,2,3}$	${}^1F_3$ ${}^3F_{2,3,4}$	${}^1G_4$ ${}^3G_{3,4,5}$

Символом “o” обозначается нечетное состояние (от англ. *odd* – нечетный).

21.4.

Конфигурация	Термы и состояния			
<i>spd</i>	$2S_{\frac{1}{2}}^o$	$2P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^o$	$2D_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}}^o$	$2F_{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}}^o$
	$4S_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^o$	$4P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}}^o$	$4D_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}}^o$	$4F_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}}^o$
<i>pdf</i>	$2S_{\frac{1}{2}}$	$2P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$	$2D_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}}$	$2F_{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}}$
		$2G_{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}}$	$2H_{\frac{9}{2}, \frac{11}{2}}$	$2I_{\frac{11}{2}, \frac{13}{2}}$
	$4S_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$	$4P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}}$	$4D_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}}$	$4F_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}}$
		$4G_{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}}$	$4H_{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}}$	$4I_{\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}}$

Символом “o” обозначается нечетное состояние (от англ. *odd* – нечетный).

21.5.  $1S_0, 1P_1, 1D_0, 3S_{0,1}, 3P_{0,1,2}, 1D_{1,2,3}$ .

21.6.  $1S_0, 1D_0, 3P_{0,1,2}$ .

21.7.  $1S_0$ .

21.10.

Элемент	Конфигурация	Возможные термы	Осн. состояние
H	$1s$	$2S$	$2S_{1/2}$
He	$1s^2$	$1S$	$1S_0$
Li	$2s^1$	$2S$	$2S_{1/2}$
Be	$2s^2$	$1S$	$1S_0$
B	$2p$	$2P^o$	$2P_{1/2}$
C	$2p^2$	$1S, 3P, 1D$	$3P_0$
N	$2p^3$	$4S^o, 2P^o, 2D^o$	$4S_{1/2}$
O	$2p^4$	$1S, 3P, 1D$	$3P_2$
F	$2p^5$	$2P^o$	$2P_{3/2}$
Ne	$2p^6$	$1S$	$1S_0$

Символом “o” обозначается нечетное состояние (от англ. *odd* – нечетный).

21.11.  $7S_3$ .

**21.12.**

Конфигурация	Осн. состояние	Конфигурация	Осн. состояние
$d^3$	${}^4F_{3/2}$	$d^7$	${}^4F_{9/2}$
$d^5$	${}^6S_{5/2}$	$f^7$	${}^8S_{7/2}$
$d^6$	${}^5D_0$	$f^8$	${}^4F_6$

**21.13.**

Конф.	Термы и состояния			
$sp$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}_{0,1}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{1,2}$		
$sd$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{2,3}$		
$npn'p$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}_{0,1}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{0,1,2,3}$
$pd$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{2,3}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{0,1,2,3}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{1,2,3,4}$
$pf$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{2,3}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}_{3,4}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{1,2,3,4}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right\}_{2,3,4,5}$
$df$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}_{1,2,3,4}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right\}_{2,3,4,5}$	$\left\{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}_{0,1,2,3,4,5}$	$\left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}_{1,2,3,4,5,6}$
$np^2$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}_0$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}_{1,2}$	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}_{0,2}$

**22.1.** Проверьте, что распад запрещен законом сохранения энергии.

**22.2.** Условия задачи соответствуют параметрам реального ускорителя PEP-II (SLAC, США). Согласно законам сохранения энергии и импульса  $B_d^0 \bar{B}_d^0$  пара на этом ускорителе родиться может, а  $B_s^0 \bar{B}_s^0$  – уже нет.

**22.3.** Изюминка данного распада в том, что оба мезона  $K_1(1270)$  и  $K_0^*(1430)$  принадлежат к так называемым широким резонансам. Ширина первого из них  $\Gamma_1 = 90 \pm 20$  МэВ, а второго  $\Gamma_2 = 270 \pm 80$  МэВ. Ширина резонанса характеризует разброс возможной измеряемой массы резонанса. Обычно  $\Gamma \ll Mc^2$ . Но бывает так, что  $\Gamma < Mc^2$ , но отношение  $\Gamma/Mc^2$  не столь мало. Тогда резонанс называется широким. С учетом ширины резонанса, реакция возможна, если  $M_1c^2 + \Gamma_1 \geq M_2c^2 - \Gamma_2 + M_\pi c^2$ . Именно такое неравенство и реализуется в рассматриваемом распаде.

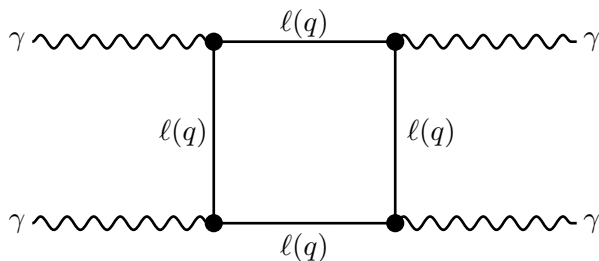
**22.4.** Еще одна частица нужна, чтобы выполнялся закон сохранения полного момента. Кроме того, антинейтрино должно быть легким, поскольку закон сохранения энергии требует, чтобы  $m_{\bar{\nu}_e} < m_n - m_p - m_e = 939,565 - 938,272 -$

$0,511 = 0,782 \text{ МэВ}/c^2$ . В реальности массы антинейтрино и нейтрино примерно в миллион (!) раз меньше. Из экспериментов по измерению нейтринных осцилляций известно, что эти массы составляют десятые доли эВ/ $c^2$ . Нейтральность антинейтрино очевидна.

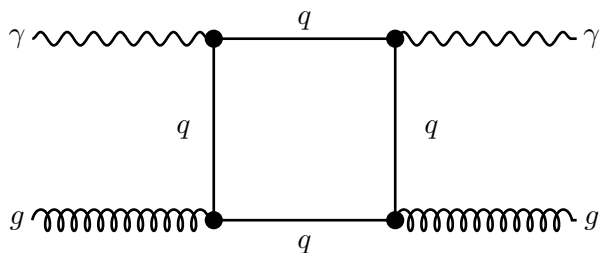
**22.5.** Первый распад на кварковом уровне идет за счет реакции  $\bar{b} \rightarrow \bar{c}(W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$ . Для второго распада такой простой реакции не существует.

**22.6.** Вероятность второго распада больше.

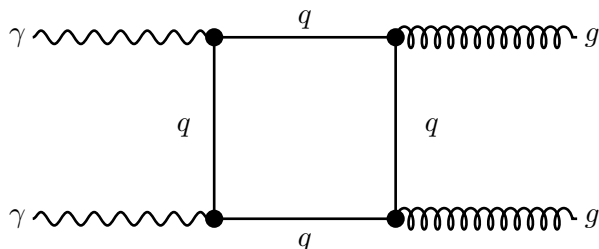
**22.7.** а) лептонный или кварковый «квадратик»:



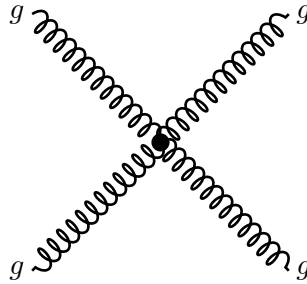
**б)** только кварковый «квадратик»:



**в)** только кварковый «квадратик»:



г) контактное четырехглюонное взаимодействие:



**22.8.** Одним – не может, т.к. начальный и конечный протон бесцветны, а глюоны переносят цвет. Полезно нарисовать соответствующую диаграмму. Отдельно следует разобраться, почему не возможен обмен диагональными по цвету глюонами.

Из двух глюонов можно сконструировать бесцветное состояние (например, жесткий померон). Поэтому подобный обмен возможен.

**22.9.** Распад  $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$  запрещен бозевостью. Кстати, как и распад  $\rho^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

**22.11.** В системе центра масс суммарный импульс  $e^+e^-$ -пучков равен нулю. Поэтому, если вся энергия пучков идет только на рождение  $H$  и  $Z^0$  в покое (то есть не тратится на кинетическую энергию), то  $M_H \leq E/c^2 - M_Z = 117,8$  ГэВ/ $c^2$ . Из-за особенностей статистической обработки данных реально значение верхнего предела оказалось несколько меньше и составило 114,4 ГэВ/ $c^2$ . Таким образом, для того, чтобы открыть бозон Хиггса еще в 2000-м году, нужно было поднять энергию коллайдера LEP всего на 10%. Технически это было возможно. Но руководство CERN-а приняло другое решение. В 2001-м году LEP демонтировали, а на его месте начали строить LHC. Сейчас к этому решению можно относиться по-разному. Но кто-же в на рубеже XX-ого и XXI-ого веков мог знать, что вожделенный бозон Хиггса столь близок!

Кстати, Нобелевская премия по физике за 2013 год была присуждена бельгийцу Франсуа Энглери и британцу Питеру Хиггсу за «теоретическое открытие механизма, который помогает нам понять происхождение масс субатомных частиц

и который был недавно подтвержден благодаря открытию на Большом адронном коллайдере...» бозона Хиггса.

**22.12.** Противоречия нет. Бозон Хиггса не может распадаться на два фотона непосредственно. Но может распадаться через промежуточные виртуальные частицы, например, в реакции  $H \rightarrow b\bar{b} \rightarrow \gamma\gamma$ . Самостоятельно нарисуйте фейнмановскую диаграмму данного процесса. Почему вероятность распада через виртуальное  $e^+e^-$  состояние гораздо меньше, чем через виртуальное  $b\bar{b}$  состояние?

**22.13.** Рассмотрим модельную ситуацию. Пусть имеется коллайдер, на котором сталкиваются пучки частиц с энергией  $E$  каждый. Тогда суммарная энергия столкновения  $E_{tot} = 2E$ . Пусть  $U_g$  – гравитационная энергия взаимодействия двух частиц. Гравитация будет играть заметную роль, когда  $E_{tot} \sim U_g$ . Для оценки величины  $U_g$  используем формулу Ньютона:  $U_g = \frac{G_N m^2}{r}$ . Из теории относительности известно, что  $m = E/c^2$ . Кроме того, из соотношения неопределенностей Гейзенберга имеем:  $r = ct \sim c\hbar/E$ . Тогда условие необходимости учета гравитационных эффектов примет вид:

$$2E \sim \frac{G_N E^3}{\hbar c^5} \Rightarrow E \sim \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N}} = \sqrt{2} E_{\text{Pl.}}$$

**22.14.** Для этого необходимо, например, найти вероятность появления мюонного нейтрино в чистом пучке электронных нейтрино за время  $t$ .

**22.17.** Считая доминирующей диаграмму излучения  $\pi^0$  при помощи двух виртуальных глюонов для реакции  $\Delta^+ \rightarrow p\pi^0$ , можем записать:

$$\alpha_s(m_q) = \sqrt[4]{\alpha_{em} \frac{w(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)}{w(\Delta^+ \rightarrow p\gamma)}} = \sqrt[4]{\frac{99,4}{137 \cdot 0,6}} \approx 1$$

с высокой степенью точности. Эта оценка еще раз иллюстрирует неприменимость теории возмущений к вычислению процессов сильного взаимодействия в реакциях адронов.

**22.18.** Поскольку  $1/m_c \ll 1/\Lambda_{QCD}$ , то для описания основного состояния  $c\bar{c}$ -системы можно воспользоваться асимптотически свободным потенциалом сильного взаимодействия в приближении одноглюонного обмена  $U = -4\alpha_s/3r$  и теорией Н.Бора для атома водорода с приведенной массой  $m = m_c/2$ . Тогда  $E_n = -\frac{4m_c c^2}{9n^2} \alpha_s^2$ , а масса  $J/\psi$ -мезона связана с  $E_1$  соотношением:  $M c^2 = 2m_c c^2 - E_1$ . Отсюда легко можно найти  $\alpha_s$ .

**22.19. а)** В силу закона сохранения полного момента орбитальный момент продуктов распада  $L^{(AB)} = S$  и его проекция на ось  $z$  подчиняется условию  $L_z^{(AB)} = S_z$ . Тогда угловое распределение продуктов распада однозначно задается видом шаровой функции  $Y_{S S_z}(\theta, \phi)$ :

$$\frac{dw}{d \cos \theta} \sim |Y_{S S_z}(\theta, \phi)|^2.$$

**б)** Второй случай является простым обобщением первого:

$$\frac{dw}{d \cos \theta} \sim \sum_{S_z} w_{S_z} |Y_{S S_z}(\theta, \phi)|^2,$$

где  $w_{S_z}$  – вероятность нахождения частице  $X$  в состоянии с проекцией спина  $S_z$ . Очевидно, что  $\sum_{S_z} w_{S_z} = 1$ .

**22.20.** Согласно результату задачи **22.19**, угловая часть волновой функции  $K\pi$ -системы определяется только значениями относительного орбитального момента между  $K$  и  $\pi$ . Эти значения определяются спином и проекциями спина  $K^{*0}$  на ось  $z$ . Поскольку спин  $B$ -мезона равен нулю, то в силу закона сохранения проекции полного момента на ось  $z$  имеем:  $S_z^{(K^{*0})} = -S_z^{(\gamma)} = \mp 1$ . Учитывая явный вид шаровых функций  $Y_{11}(\theta, \phi)$  и  $Y_{1-1}(\theta, \phi)$ , получаем:

$$\frac{dw}{d \cos \theta} \sim \alpha |Y_{11}(\theta, \phi)|^2 + \beta |Y_{1-1}(\theta, \phi)|^2 \sim (\alpha + \beta) \sin^2 \theta,$$

где  $\theta$  – угол между осью  $z$  и направлением движения пиона в системе покоя  $K^{*0}$ -мезона.

**22.21.** Уровни энергии зависят от двух квантовых чисел  $l$  и  $n$  и могут быть записаны в виде:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi^2}{a^2} n^2 + \frac{1}{r^2} l^2 \right) \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{и } l = 0, 1, 2, \dots$$

При  $l = 0$  уровни энергии  $E_{n0}$  совпадают с уровнями энергии одномерной потенциальной ямы ширины  $a$  с бесконечно высокими стенками. И дополнительное измерение никак не искажает уровни энергии по оси  $x$  при всех значениях квантового числа  $n$ . Если  $l = 1$ , то

$$E_{n1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi^2}{a^2} n^2 + \frac{1}{r^2} \right).$$

Очевидно, что система уровней  $E_{n1}$  начинает искажать систему уровней  $E_n$  при квантовых числах  $n \sim \frac{1}{\pi} \frac{a}{r} \gg 1$ . Уровни с небольшими значениями  $n$  (то есть с низкими энергиями) не чувствуют присутствия компактного дополнительного измерения.

В рассмотренной модельной задаче проявилась общая идея: при достаточно малых энергиях дополнительные измерения никак не проявляют себя в окружающем мире. Чтобы найти признаки дополнительных измерений, необходимо уйти в область высоких энергий, например, изучать взаимодействия элементарных частиц на Большом адронном коллайдере в CERN-е.

**22.22. а)**  $\frac{F_{em}}{F_N} = \frac{e^2}{G_N m_p^2} \approx 10^{-39}$ .

**б)**  $U(r) = \frac{\hbar c}{m_X^2} \left( \frac{\hbar}{m_X c L} \right)^n \frac{m_1 m_2}{r}$ , где  $L = 2\pi R$  – длина дополнительного измерения.

**в)**  $R = \frac{\hbar}{2\pi m_X c} \left( \frac{m_{Pl}}{m_X} \right)^{2/n}$ .

Если  $n = 1$ , то  $R \sim 10^{15}$  см – запрещено экспериментом.

Если  $n = 2$ , то  $R \sim 1$  мм – на грани экспериментальной точности.

Если  $n = 3$ , то  $R \sim 10^{-5}$  мм – не противоречит экспериментальным результатам.



**22.23.** Самое очевидное, что свободный нейтрон в рамках Стандартной модели станет стабильной частицей как и свободный протон. Однако  $\beta$ -распады ядер по-прежнему будут возможны. Менее очевидное следствие заключается в том, что при условии  $m_n < m_p + m_e$  не существовало бы звезд типа Солнца и, следовательно, человечества! Действительно, реакция, запускающая термоядерный цикл на Солнце – это реакция образования дейтерия  $p + n \rightarrow D + \gamma$ . Нейтроны на Солнце берутся потому, что в динамическом равновесии находятся две реакции: реакция образования нейтрона  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  и реакция распада нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ . Если вторая реакция перестанет идти, то очень быстро завершится и первая. После этого ядерный цикл на Солнце прекратится.

**22.24.** Это отношение равно нулю, поскольку в распаде  $\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \nu_\mu$  не сохраняется полный момент. Значит эта реакция не может проходить ни в какой теории, в том числе и в такой, в которой не сохраняется лептонное число и, следовательно, возможен распад  $\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+$ .

**Приложение 1. Физические константы и единицы.**

Скорость света в вакууме	$c$	$2,99792458 \cdot 10^{10}$	см/с
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67384(80) \cdot 10^{-8}$	$\text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,3806488(13) \cdot 10^{-16}$	эрг/К
		$8,6173324(78) \cdot 10^{-5}$	эВ/К
Постоянная Планка	$h$	$6,62606957(29) \cdot 10^{-27}$	эрг·с
		$4,135667516(91) \cdot 10^{-15}$	эВ·с
Приведенная постоянная Планка $\hbar/2\pi$	$\hbar$	$1,054571726(47) \cdot 10^{-27}$	эрг·с
		$6,58211928(15) \cdot 10^{-16}$	эВ·с
Элементарный заряд (заряд электрона)	$e$	$4.80320451(10) \cdot 10^{-10}$	ед. СГСЭ
		$1,602176565(35) \cdot 10^{-19}$	Кл
Масса электрона	$m_e$	$9,10938291(40) \cdot 10^{-28}$	г
		$m_e c^2$	$0,510998928(11)$
Масса протона	$m_p$	$1,672621777(74) \cdot 10^{-24}$	г
		$m_p c^2$	$938,272046(21)$
Отношение масс протона и электрона	$\frac{m_p}{m_e}$	$1836,15267245(75)$	
Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$	$\alpha$	$7,2973525698(46) \cdot 10^{-3}$	
		$\alpha^{-1}$	$137,035999074(44)$
Постоянная Ридберга $R_\infty = \alpha^2 m_e c / 2\hbar$	$R_\infty$	$109737,31568539(55)$	$\text{см}^{-1}$
Ридберг $Ry = m e^4 / 2\hbar^2$	$Ry$	$13,60569253(30)$	эВ
Боровский радиус $a_0 = \hbar^2 / m_e e^2$	$a_0$	$0,52917721092(17)$	Å

Классический радиус электрона $r_e = \alpha^2 a_0$	$r_e$	$2,8179403267(27) \cdot 10^{-13}$	см
Комптоновская длина волны электрона $\Lambda_C = h/m_e c$	$\Lambda_C$	$2,4263102389(16) \cdot 10^{-10}$	см
Поверхностная постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = \pi^2 k^4 / 60 c^2 \hbar^3$	$\sigma$	$5,670373(21) \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4}$
Магнетон Бора $\mu_B = e\hbar/2m_e$	$\mu_B$	$0,927400968(20) \cdot 10^{-20}$ $5,7883818066(38) \cdot 10^{-5}$	эрг/Гс эВ/Гс
Ядерный магнетон $\mu_N = e\hbar/2m_p$	$\mu_N$	$5,05078353(11) \cdot 10^{-24}$ $3,1524512605(22) \cdot 10^{-8}$	эрг/Гс эВ/Гс

Приведены значения, рекомендованные CODATA (Комитет по данным для науки и техники, <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>).

### Соотношения между различными единицами измерения энергии и их эквивалентами

	эрг	см <sup>-1</sup>	Гц
эрг	—	$[\text{эрг}]/hc$ $5,03411701(22) \cdot 10^{15}$	$[\text{эрг}]/h$ $1,509190311(67) \cdot 10^{26}$
см <sup>-1</sup>	$[\text{см}^{-1}] \cdot hc$ $1,986445684(88) \cdot 10^{-16}$	—	$[\text{см}^{-1}] \cdot c$ $2,99792458 \cdot 10^{10}$
Гц	$[\text{Гц}] \cdot h$ $6,62606957(29) \cdot 10^{27}$	$[\text{Гц}]/c$ $3,33564095 \dots \cdot 10^{-11}$	—
К	$[\text{К}] \cdot k$ $1,3806488(13) \cdot 10^{-16}$	$[\text{К}] \cdot k/hc$ $0,69503476(63)$	$[\text{К}] \cdot k/h$ $2,0836618(19) \cdot 10^{10}$
эВ	$1,602176565(35) \cdot 10^{-12}$	$[\text{эВ}]/hc$ $8065,54429(18) \cdot 10^5$	$[\text{эВ}]/h$ $2,417989348(53) \cdot 10^{14}$

	К	эВ
эрг	$[\text{эрг}]/k$ $7,2429716(66) \cdot 10^{15}$	$6,24150934(14) \cdot 10^{11}$
см <sup>-1</sup>	$[\text{см}^{-1}] \cdot hc/k$ $1,4387770(13)$	$[\text{см}^{-1}] \cdot hc$ $1,239841930(27) \cdot 10^{-4}$
Гц	$[\text{Гц}] \cdot h/k$ $4,7992434(44) \cdot 10^{-11}$	$[\text{Гц}] \cdot h$ $4,135667516(91) \cdot 10^{-15}$
К	—	$[\text{К}] \cdot k$ $8,6173324(78) \cdot 10^{-5}$
эВ	$[\text{эВ}]/k$ $1,1604519(11) \cdot 10^4$	—

$$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ эВ} = 1,602176565 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

$$1 \text{ см} = 10^{-8} (\text{ангстрем}) = 10^{-11} \text{ Фм (ферми)}$$

## Приложение 2. Элементарные частицы

В таблицах приведены данные по фундаментальным бозонам, лептонам и некоторым адронам. Для частиц стабильных относительно сильного взаимодействия приведены времена жизни, для короткоживущих резонансов – полные ширины резонансов.

В таблице применяются следующие обозначения:  $S$  – спин частицы,  $J$  – полный момент количества движения,  $L_{e,\mu,\tau}$  – лептонный заряд,  $I$  – изоспин,  $P$  – пространственная четность,  $B$  – барионный заряд,  $S$  – странность,  $C$  – очарование,  $B$  – bottom,  $\tau$  – время жизни,  $\Gamma$  – полная ширина резонанса.

Данные взяты из работы J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition (<http://pdg.lbl.gov>).

### Калибровочные (фундаментальные) бозоны

Частица	Масса	Ширина распада, $\Gamma$	$J^P(I)$	Основные моды распада
$\gamma$	$< 1 \cdot 10^{-18}$ эВ	стабильно	$1^-(0,1)$	
$g$ (глюон)	0		$1^-(0)$	
гравитон	$< 7 \cdot 10^{-32}$ эВ		$J = 2$	
$W^\pm$	80,4 ГэВ	2,1 ГэВ	$J = 1$	$e\nu, \tau\nu, \mu\nu,$ адроны
$Z$	91,19 ГэВ	2,50 ГэВ	$J = 1$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-,$ $\tau^+\tau^-,$ адроны
$H^0, H^\pm$	$H^0$ : 126 ГэВ			$WW^*, ZZ^*,$ $\gamma\gamma, b\bar{b}, \tau^+\tau^-$

**Лептоны ( $J = 1/2, S = 1/2$ )**

Частица	Масса (МэВ)	Время жизни	Лептонный заряд			Основные моды распада
			$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	
$\nu_e$	$< 2,05 \cdot 10^{-6}$	стабильно	+1	0	0	
$\nu_\mu$	$< 0,19$	стабильно	0	+1	0	
$\nu_\tau$	$< 18,2$	стабильно	0	0	+1	
$e^-$	0,511	$> 4,6 \cdot 10^{26}$ лет	+1	0	0	$e\nu\bar{\nu}$
$\mu^-$	105,66	$2,2 \cdot 10^{-6}$ с	0	+1	0	
$\tau^-$	1777	$29 \cdot 10^{-16}$ с	0	0	+1	адроны+ $\nu, \mu\bar{\nu}, e\nu\bar{\nu}$

**Адроны**

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	$\tau$ (с)	$J^P(I)$	Основные моды распада
Легкие мезоны ( $S = C = B = 0$ )					
$\pi^+$	$u\bar{d}$	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1)$	$\nu\mu^+$
$\pi^-$	$\bar{u}d$	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1)$	$\bar{\nu}\mu^-$
$\pi^0$	$(\bar{u}u - \bar{d}d) / \sqrt{2}$	134,98	$8,5 \cdot 10^{-17}$	$0^-(1)$	$2\gamma$
$\eta$	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s}{\sqrt{3}}$	547,9	1,31 нэВ	$0^-(0)$	$2\gamma, 3\pi$
$\eta'(958)$	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s}{\sqrt{3}}$	958	0,20 МэВ	$0^-(0)$	$\nu 2\pi, \rho^0\gamma$

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	$\tau$ (с)	$J^P(I)$	Основные моды распада
$\omega(782)$	$(\bar{u}u + \bar{d}d) / \sqrt{2}$	783	8,5 МэВ	$1^-(0)$	$3\pi$
$\phi(1020)$	$s\bar{s}$	1019,5	4,3 МэВ	$1^-(0)$	$K^+K^-, K_L^0 K_S^0$
$\rho(770)^+$	$u\bar{d}$	775	149 МэВ	$1^-(1)$	$\pi\pi$
$\rho(770)^-$	$\bar{u}d$	775	149 МэВ	$1^-(1)$	$\pi\pi$
$\rho(770)^0$	$(\bar{u}u - \bar{d}d) / \sqrt{2}$	775	149 МэВ	$1^-(1)$	$\pi\pi$
Странные мезоны ( $S = \pm 1, C = B = 0$ )					
$K^+$	$u\bar{s}$	494	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1/2)$	$\nu\mu^+, \pi^0\pi^+$
$K^-$	$s\bar{u}$	494	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1/2)$	$\bar{\nu}\mu^-, \pi^0\pi^-$
$K^0$	$d\bar{s}$	498	$K_S^0: 8,95 \cdot 10^{-11}$	$0^-(1/2)$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$
$\bar{K}^0$	$\bar{d}s$	498	$K_L^0: 5,12 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1/2)$	$\pi\nu, \pi\mu\nu, 3\pi$
Очарованные мезоны ( $C = \pm 1$ )					
$D^+$	$c\bar{d}$	1869	$1,1 \cdot 10^{-11}$	$0^-(1/2)$	$K^+\text{др.}, e^+\text{др.}, \mu^+\text{др.}$
$D^-$	$\bar{c}d$	1869	$1,1 \cdot 10^{-11}$	$0^-(1/2)$	$K^+\text{др.}, e^+\text{др.}, \mu^+\text{др.}$
$D^0$	$c\bar{u}$	1865	$4,1 \cdot 10^{-13}$	$0^-(1/2)$	$K^+\text{др.}, e^+\text{др.}, \mu^+\text{др.}$
$\bar{D}^0$	$\bar{c}u$	1865	$4,1 \cdot 10^{-13}$	$0^-(1/2)$	$K^+\text{др.}, e^+\text{др.}, \mu^+\text{др.}$
Очарованные странные мезоны ( $C = S = \pm 1$ )					
$D_S^+$	$c\bar{s}$	1968,5	$5,0 \cdot 10^{-13}$	$0^-(0)$	$K^+\text{др.}$
$D_S^-$	$s\bar{c}$	1968,5	$5,0 \cdot 10^{-13}$	$0^-(0)$	$K^+\text{др.}$

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	$\tau$ (с)	$J^P(I)$	Основные моды распада
<b><math>B</math>-мезоны (<math>B = \pm 1</math>)</b>					
$B^+$	$u\bar{b}$	5279,3	$1,6 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	$D^+\text{др.}, D^{*+}\text{др.}, \nu^+\text{др.}$
$B^-$	$b\bar{u}$	5279,3	$1,6 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	$D^+\text{др.}, D^{*+}\text{др.}, \nu^+\text{др.}$
$B^0$	$d\bar{b}$	5279,6	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	$D^+\text{др.}, D^{*+}\text{др.}, \nu^+\text{др.}$
$\bar{B}^0$	$b\bar{d}$	5279,6	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	$D^+\text{др.}, D^{*+}\text{др.}, \nu^+\text{др.}$
<b><math>c\bar{c}</math>-мезоны</b>					
$J/\psi$	$c\bar{c}$	3097	93 нэВ	$1^-(0)$	адроны, $2e, 2\mu$
<b><math>b\bar{b}</math>-мезоны</b>					
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	9460	54 нэВ	$1^-(0)$	$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$
<b>Барионы (<math>B = 1</math>)</b>					
<b><math>N</math>-барионы (<math>S = 0</math>)</b>					
$p$	$uud$	938,27	$> 10^{32}$ лет	$1/2^+(1/2)$	
$n$	$udd$	939,57	$880,0 \pm 0,9$	$1/2^+(1/2)$	$p\bar{e}\bar{\nu}$
$N(1440)^+$	$uud$	$\approx 1440$	$\approx 300$ МэВ	$1/2^+(1/2)$	$n(p) + \pi(2\pi), \Delta\pi$
$N(1440)^0$	$udd$	$\approx 1440$	$\approx 300$ МэВ	$1/2^+(1/2)$	$n(p) + \pi(2\pi), \Delta\pi$
$N(1520)^+$	$uud$	$\approx 1520$	$\approx 115$ МэВ	$3/2^-(1/2)$	$n(p) + \pi(2\pi), \Delta\pi$
$N(1520)^0$	$udd$	$\approx 1520$	$\approx 115$ МэВ	$3/2^-(1/2)$	$n(p) + \pi(2\pi), \Delta\pi$
<b><math>\Delta</math>-барионы (<math>S = 0</math>)</b>					
$\Delta(1232)^{++}$	$uuu$	$\approx 1232$	$\approx 117$ МэВ	$3/2^+(3/2)$	$p\pi^+$



Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	$\tau$ (с)	$J^P(I)$	Основные моды распада
$\Delta(1232)^+$	<i>uud</i>	$\approx 1232$	$\approx 117 \text{ МэВ}$	$3/2^+(3/2)$	$p\pi^0, n\pi^+$
$\Delta(1232)^0$	<i>udd</i>	$\approx 1232$	$\approx 117 \text{ МэВ}$	$3/2^+(3/2)$	$p\pi^-, n\pi^0$
$\Delta(1232)^-$	<i>ddd</i>	$\approx 1232$	$\approx 117 \text{ МэВ}$	$3/2^+(3/2)$	$n\pi^-$
$\Lambda$ -барионы ( $S = -1$ )					
$\Lambda$	<i>uds</i>	1116	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(0)$	$p\pi^-, n\pi^0$
$\Sigma$ -барионы ( $S = -1$ )					
$\Sigma^+$	<i>uus</i>	1189	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1)$	$p\pi^0, n\pi^+$
$\Sigma^0$	<i>uds</i>	1193	$7,4 \cdot 10^{-20}$	$1/2^+(1)$	$\Lambda\gamma$
$\Sigma^-$	<i>dds</i>	1197	$1,5 \cdot 10^{-20}$	$1/2^+(1)$	$n\pi^-$
$\Sigma(1385)^+$	<i>uus</i>	1383	36 МэВ	$3/2^+(1)$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Sigma(1385)^0$	<i>uds</i>	1384	36 МэВ	$3/2^+(1)$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Sigma(1385)^-$	<i>dds</i>	1387	39 МэВ	$3/2^+(1)$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Xi$ -барионы ( $S = -2$ )					
$\Xi^0$	<i>uss</i>	1315	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^0$
$\Xi^-$	<i>dss</i>	1322	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^-$
$\Xi(1530)^0$	<i>uss</i>	1532	9,1 МэВ	$3/2^+(1/2)$	$\Xi\pi$
$\Xi(1530)^-$	<i>dss</i>	1535	9,9 МэВ	$3/2^+(1/2)$	$\Xi\pi$
$\Omega$ -барионы ( $S = -3$ )					
$\Omega^-$	<i>sss</i>	1672	$0,82 \cdot 10^{-10}$	$3/2^+(0)$	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-$

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	$\tau$ (с)	$J^P(I)$	Основные моды распада
Очарованные барионы ( $C = \pm 1$ )					
$\Lambda_C^+$	$udc$	2286	$2 \cdot 10^{-13}$	$1/2^+(0)$	$n$ или $p$ ) <sup>+</sup> др.
$\Sigma_C(2455)^{++}$	$uuc$	2454	2 МэВ	$1/2^+(1)$	$\Lambda_C^+\pi^+$
$\Sigma_C(2455)^+$	$udc$	2453	$< 4,6$ МэВ	$1/2^+(1)$	$\Lambda_C^+\pi^0$
$\Sigma_C(2455)^0$	$ddc$	2454	2 МэВ	$1/2^+(1)$	$\Lambda_C^+\pi^-$

## Приложение 3. Периодическая система химических элементов

	1 (IA)																	
1	<b>1</b>																	
	<b>H</b> Водород 1,008* $1s$ 13,5984	2 (IIA)																
2	<b>3</b>	<b>Li</b> Литий 6,94* $1s^2 2s$ 5,392	<b>4</b>	<b>Be</b> Бериллий 9,012 $1s^2 2s^2$ 9,323														
3	<b>11</b>	<b>Na</b> Натрий 22,990 [Ne]3s 5,139	<b>12</b>	<b>Mg</b> Магний 24,305 [Ne]3s <sup>2</sup> 7,646														
	3 (IIIA)		4 (IVB)		5 (VB)		6 (VIB)		7 (VIIB)		8 (VIIIB)		9 (VIIIB)					
4	<b>19</b>	<b>K</b> Калий 39,098 [Ar]4s 4,341	<b>20</b>	<b>Ca</b> Кальций 40,078 [Ar]4s <sup>2</sup> 6,113	<b>21</b>	<b>Sc</b> Скандий 44,956 [Ar]3d4s <sup>2</sup> 6,562	<b>22</b>	<b>Ti</b> Титан 47,867 [Ar]3d <sup>2</sup> 4s <sup>2</sup> 6,828	<b>23</b>	<b>V</b> Ванадий 50,942 [Ar]3d <sup>3</sup> 4s <sup>2</sup> 6,828	<b>24</b>	<b>Cr</b> Хром 51,996 [Ar]3d <sup>5</sup> 4s 6,767	<b>25</b>	<b>Mn</b> Марганец 54,938 [Ar]3d <sup>5</sup> 4s <sup>2</sup> 7,434	<b>26</b>	<b>Fe</b> Железо 55,845 [Ar]3d <sup>6</sup> 4s <sup>2</sup> 7,903	<b>27</b>	<b>Co</b> Кобальт 58,933 [Ar]3d <sup>7</sup> 4s <sup>2</sup> 7,881
5	<b>37</b>	<b>Rb</b> Рубидий 85,468 [Kr]5s 4,177	<b>38</b>	<b>Sr</b> Стронций 87,62 [Kr]5s <sup>2</sup> 5,695	<b>39</b>	<b>Y</b> Иттрий 88,906 [Kr]4d5s <sup>2</sup> 6,217	<b>40</b>	<b>Zr</b> Цирконий 91,224 [Kr]4d <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup> 6,334	<b>41</b>	<b>Nb</b> Ниобий 92,906 [Kr]4d <sup>4</sup> 5s 6,759	<b>42</b>	<b>Mo</b> Молибден 95,96 [Kr]4d <sup>5</sup> 5s 7,092	<b>43</b>	<b>Tc</b> Технеций (88) [Kr]4d <sup>5</sup> 5s <sup>2</sup> 7,119	<b>44</b>	<b>Ru</b> Рутений 101,07 [Kr]4d <sup>7</sup> 5s 7,361	<b>45</b>	<b>Rh</b> Родий 102,906 [Kr]4d <sup>8</sup> 5s 7,459
6	<b>55</b>	<b>Cs</b> Цезий 132,905 [Xe]6s 3,894	<b>56</b>	<b>Ba</b> Барий 137,327 [Xe]6s <sup>2</sup> 5,212	<b>57–71</b> <b>La–Lu</b> Лантаноиды		<b>72</b>	<b>Hf</b> Гафний 178,49 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup> 6,825	<b>73</b>	<b>Ta</b> Тантал 180,948 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup> 7,550	<b>74</b>	<b>W</b> Вольфрам 183,84 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup> 7,864	<b>75</b>	<b>Re</b> Рений 186,207 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup> 7,834	<b>76</b>	<b>Os</b> Осмий 190,23 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup> 8,438	<b>77</b>	<b>Ir</b> Иридий 192,217 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup> 8,967
7	<b>87</b>	<b>Fr</b> Франций (223) [Rn]7s 4,073	<b>88</b>	<b>Ra</b> Радий (226) [Rn]7s <sup>2</sup> 5,278	<b>89–103</b> <b>Ac–Lr</b> Актиноиды		<b>104</b>	<b>Rf</b> Резерфордий (265) [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup> 6,01	<b>105</b>	<b>Db</b> Дубний (268) [Rn]5f <sup>14</sup> 5d <sup>3</sup> 7s <sup>2</sup> 6,8	<b>106</b>	<b>Sg</b> Сибгрий (271) [Rn]4f <sup>14</sup> 5d <sup>4</sup> 7s <sup>2</sup> 77,8	<b>107</b>	<b>Bh</b> Борий 54,938 [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup> 7,7	<b>108</b>	<b>Hs</b> Хассий (277) [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>8</sup> 7s <sup>2</sup> 8,8	<b>109</b>	<b>Mt</b> Мейтнерий (276)

Атомный номер	Основное состояние
<b>Символ</b>	
Название	
Атомная масса, а.е.м.	
Конфигурация	
Потенциал ионизации, эВ	

<b>57</b>	<b>58</b>	<b>59</b>	<b>60</b>	<b>61</b>	<b>62</b>
<b>La</b> Лантан 138,905 [Xe]5d6s <sup>2</sup> 5,577	<b>Ce</b> Церий 140,116 [Xe]4f5d6s <sup>2</sup> 5,539	<b>Pr</b> Прозеродим 140,908 [Xe]4f <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup> 5,473	<b>Nd</b> Неодим 144,242 [Xe]4f <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup> 5,525	<b>Pm</b> Прометерий (145) [Xe]4f <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup> 5,582	<b>Sm</b> Самарий 150,36 [Xe]4f <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup> 5,644
<b>89</b>	<b>90</b>	<b>91</b>	<b>92</b>	<b>93</b>	<b>94</b>
<b>Ac</b> Актиний (227) [Rn]6d7s <sup>2</sup> 5,380	<b>Th</b> Торий 232,038 [Rn]6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup> 6,307	<b>Pa</b> Проактиний 231,036 [Rn]5f <sup>2</sup> 6d7s <sup>2</sup> 5,89	<b>U</b> Уран 238,029 [Rn]5f <sup>3</sup> 6d7s <sup>2</sup> 6,194	<b>Np</b> Нептуний (237) [Rn]5f <sup>4</sup> 6d7s <sup>2</sup> 6,266	<b>Pu</b> Плутон (244) [Rn]5f <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup> 6,026

\* – Рекомендованное значение атомной массы для смеси изотопов; ( ) – масса наиболее стабильного изотопа. Данные приведены согласно работе Dragoset R.A., Musgrove A., Clark C.W., and Martin W.C., (2013), Periodic Table: Atomic Properties of the Elements (Version 7), NIST SP 966. (<http://physics.nist.gov/PT>).

									<b>10</b> $^1S_0$ <b>He</b> Гелий 4,003 $1s^2$ 20,180	1
			<b>13</b> (IIIA)	<b>14</b> (IVA)	<b>15</b> (VA)	<b>16</b> (VIA)	<b>17</b> (VIIA)			
			<b>5</b> $^2P_{1/2}$ <b>B</b> Бор 10,81* $1s^2 2s^2 2p$ 8,298	<b>6</b> $^3P_0$ <b>C</b> Углерод 12,011* $1s^2 2s^2 2p^2$ 11,260	<b>7</b> $^4S_{3/2}$ <b>N</b> Азот 14,007* $1s^2 2s^2 2p^3$ 14,534	<b>8</b> $^3P_2$ <b>O</b> Кислород 15,999* $1s^2 2s^2 2p^4$ 13,618	<b>9</b> $^2P_{1/2}$ <b>F</b> Фтор 18,998 $1s^2 2s^2 2p^5$ 14,423	<b>10</b> $^1S_0$ <b>Ne</b> Неон 20,180 $1s^2 2s^2 2p^6$ 21,565		2
			<b>13</b> $^2P_{1/2}$ <b>Al</b> Алюминий 26,982 [Ne]3s <sup>2</sup> 3p 5,986	<b>14</b> $^3P_0$ <b>Si</b> Кремний 28,085* [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> 8,152	<b>15</b> $^4S_{3/2}$ <b>P</b> Фосфор 30,974 [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>3</sup> 10,487	<b>16</b> $^3P_2$ <b>S</b> Сера 32,06* [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup> 10,360	<b>17</b> $^2P_{1/2}$ <b>Cl</b> Хлор 35,45* [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>5</sup> 12,968	<b>18</b> $^1S_0$ <b>Ar</b> Аргон 39,948 [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup> 15,760		3
<b>10</b> (VIIIB)	<b>11</b> (IB)	<b>12</b> (IIB)								
<b>28</b> $^3F_4$ <b>Ni</b> Никель 58,693 [Ar]3d <sup>8</sup> 4s <sup>2</sup> 7,640	<b>29</b> $^2S_{1/2}$ <b>Cu</b> Медь 58,693 [Ar]3d <sup>10</sup> 4s 7,726	<b>30</b> $^1S_0$ <b>Zn</b> Цинк 65,38 [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 9,394	<b>31</b> $^2P_{1/2}$ <b>Ga</b> Галлий 69,723 [Zn]4p 5,999	<b>32</b> $^3P_0$ <b>Ge</b> Германий 72,63 [Zn]4p <sup>2</sup> 7,899	<b>33</b> $^4S_{3/2}$ <b>As</b> Мышьяк 74,922 [Zn]4p <sup>3</sup> 9,787	<b>34</b> $^3P_2$ <b>Se</b> Селен 78,96 [Zn]4p <sup>4</sup> 9,752	<b>35</b> $^2P_{1/2}$ <b>Br</b> Бром 79,904 [Zn]4p <sup>5</sup> 11,814	<b>36</b> $^1S_0$ <b>Kr</b> Криптон 83,798 [Zn]4p <sup>6</sup> 14,000		4
<b>46</b> $^1S_0$ <b>Pd</b> Палладий 106,42 [Kr]4d <sup>10</sup> 8,337	<b>47</b> $^2S_{1/2}$ <b>Ag</b> Серебро 107,868 [Kr]4d <sup>10</sup> 5s 7,576	<b>48</b> $^1S_0$ <b>Cd</b> Кадмий 112,411 [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 8,994	<b>49</b> $^2P_{1/2}$ <b>In</b> Индий 114,818 [Cd]5p 5,786	<b>50</b> $^3P_0$ <b>Sn</b> Олово 118,710 [Cd]5p <sup>2</sup> 7,344	<b>51</b> $^4S_{3/2}$ <b>Sb</b> Сурьма 121,760 [Cd]5p <sup>3</sup> 8,608	<b>52</b> $^3P_2$ <b>Te</b> Теллур 127,60 [Cd]5p <sup>4</sup> 9,010	<b>53</b> $^2P_{1/2}$ <b>I</b> Иод 126,904 [Cd]5p <sup>5</sup> 10,451	<b>54</b> $^1S_0$ <b>Xe</b> Ксенон 131,293 [Cd]5p <sup>6</sup> 12,130		5
<b>78</b> $^3D_3$ <b>Pt</b> Платина 195,084 [Xe]4f <sup>14</sup> 4d <sup>9</sup> 5s 8,959	<b>79</b> $^2S_{1/2}$ <b>Au</b> Золото 196,967 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s 9,225	<b>80</b> $^1S_0$ <b>Hg</b> Ртуть 200,59 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s 10,438	<b>81</b> $^2P_{1/2}$ <b>Tl</b> Таллий 204,38* [Hg]6p 6,108	<b>82</b> $^3P_0$ <b>Pb</b> Свинец 207,2 [Hg]6p <sup>2</sup> 7,417	<b>83</b> $^4S_{3/2}$ <b>Bi</b> Висмут 208,980 [Hg]6p <sup>3</sup> 7,286	<b>84</b> $^3P_2$ <b>Po</b> Полоний (209) [Hg]6p <sup>4</sup> 8,414	<b>85</b> $^2P_{1/2}$ <b>At</b> Астат (210) [Hg]6p <sup>5</sup> 9,350	<b>86</b> $^1S_0$ <b>Rn</b> Радон (222) [Hg]6p <sup>6</sup> 10,749		6
<b>110</b> <b>Ds</b> Дармштадт-ий (281)	<b>111</b> <b>Rg</b> Рентгений (280)	<b>112</b> <b>Cn</b> Коперни-ций (285)	<b>113</b> <b>Uut</b> Унунтрий (284)	<b>114</b> <b>Fl</b> Флеровий (289)	<b>115</b> <b>Uup</b> Унунпент-ий (288)	<b>116</b> <b>Lv</b> Ливермор-ий (293)	<b>117</b> <b>Uus</b> Унунсепт-ий (294)	<b>118</b> <b>Uuo</b> Унунокт-ий (294)		7

<b>63</b> $^8S_{7/2}$ <b>Eu</b> Европий 151,964 [Xe]4f <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup> 5,670	<b>64</b> $^9D_{2}^o$ <b>Gd</b> Гадолиний 157,25 [Xe]4f <sup>7</sup> 5d6s <sup>2</sup> 6,150	<b>65</b> $^6H_{15/2}^o$ <b>Tb</b> Тербий 158,923 [Xe]4f <sup>9</sup> 6s <sup>2</sup> 5,864	<b>66</b> $^5I_6$ <b>Dy</b> Диспрозий 162,500 [Xe]4f <sup>11</sup> 6s <sup>2</sup> 5,939	<b>67</b> $^4I_{15/2}^o$ <b>Ho</b> Гольмий 164,930 [Xe]4f <sup>11</sup> 6s <sup>2</sup> 6,022	<b>68</b> $^3H_6$ <b>Er</b> Эрбий 167,259 [Xe]4f <sup>12</sup> 6s <sup>2</sup> 6,108	<b>69</b> $^2F_{7/2}^o$ <b>Tm</b> Тулий 168,934 [Xe]4f <sup>13</sup> 6s <sup>2</sup> 6,184	<b>70</b> $^1S_0$ <b>Yb</b> Иттербий 173,054 [Xe]4f <sup>14</sup> 6s <sup>2</sup> 6,254	<b>71</b> $^2D_{3/2}$ <b>Lu</b> Лютеций 174,967 [Xe]4f <sup>14</sup> 5d6s <sup>2</sup> 5,426	
<b>95</b> $^8S_{7/2}^o$ <b>Am</b> Америций (243) [Rn]5f <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup> 5,974	<b>96</b> $^9D_{2}^o$ <b>Cm</b> Кюрий (247) [Rn]5f <sup>10</sup> 6d7s <sup>2</sup> 5,991	<b>97</b> $^6H_{15/2}^o$ <b>Bk</b> Берклий (247) [Rn]5f <sup>9</sup> 7s <sup>2</sup> 6,198	<b>98</b> $^5I_6$ <b>Cf</b> Калифорний (251) [Rn]5f <sup>11</sup> 7s <sup>2</sup> 6,282	<b>99</b> $^4I_{15/2}^o$ <b>Es</b> Эйнштейний (252) [Rn]5f <sup>11</sup> 7s <sup>2</sup> 6,368	<b>100</b> $^3H_6$ <b>Fm</b> Фермий (257) [Rn]5f <sup>12</sup> 7s <sup>2</sup> 6,50	<b>101</b> $^2F_{7/2}^o$ <b>Md</b> Менделеев-ий (258) [Rn]5f <sup>13</sup> 7s <sup>2</sup> 6,58	<b>102</b> $^1S_0$ <b>No</b> Нобелий (259) [Rn]5f <sup>14</sup> 7s <sup>2</sup> 6,65	<b>103</b> $^2D_{3/2}$ <b>Lr</b> Лоуренсий (262) [Rn]5f <sup>14</sup> 6d7s <sup>2</sup> 4,90	

## Приложение 4. Некоторые интегралы и специальные функции

1. **Гамма-функция:**  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p; \Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. **Интеграл Пуассона** (Гауссов интеграл):  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\alpha^2} dx = \alpha\sqrt{\pi}.$

Следствие (для  $n$  – целых):  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2/\alpha^2} dx = \frac{1}{2}\alpha^{n+1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$

3.  $\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \text{Li}_{n+1}(1)\Gamma(n+1)$ , где  $\text{Li}_s(z)$  – полилогарифм, определяемый

как  $\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ . В частности:  $\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} \pi^2/6, & n = 1 \\ 2,405, & n = 2 \\ \pi^4/15, & n = 3 \\ 24,9, & n = 4 \end{cases}$

4. **Оператор Лапласа** в сферической системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

5. **Полиномы Эрмита:**  $H_n(\zeta) = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} (e^{-\zeta^2})$ . В частности:

$$H_0(\zeta) = 1, H_1(\zeta) = 2\zeta, H_2(\zeta) = 4\zeta^2 - 2, H_3(\zeta) = \zeta^3 - 12\zeta.$$

Нормировка и ортогональность:  $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$

6. **Функция Бесселя** – решения дифференциального уравнения  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} +$

$$x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \text{ где } \alpha - \text{порядок.}$$

В частности, функции Бесселя первого рода целого порядка:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha\tau - x \sin \tau) d\tau, \text{ причем, } J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Функции Бесселя первого рода полуцелого порядка:  $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ ,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, J_{\alpha+1}(x) + J_{\alpha-1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x).$$

Функции Неймана (функции Бесселя второго порядка):

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

7. **Сферические функции:**  $Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\theta) \Phi(\varphi)$ , где

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^{|m|}(\cos \theta), P_l^m(x) - \text{присоединенные полиномы Лежандра, } P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

В частности:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}};$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta); Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2(\theta) - 1), Y_{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{48\pi}} \sin^2(\theta) e^{\pm 2i\varphi}.$$

Нормировка и ортогональность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

8. **Радиальные волновые функции водородоподобного атома:**

$$R_{nl}(r) = N_{nl} r^l \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right),$$

где  $Z$  – заряд ядра,  $N_{lm}$  – нормировочный множитель,  $L_s^q(\xi)$  – обобщенный полином Лагерра:  $L_s^q(\xi) = e^\xi \xi^{-q} \frac{d^s}{d\xi^s} (\xi^{q+s} e^{-\xi})$ . Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} R_n l^2(r) r^2 dr = 1$ .

В частности:

$$R_{10}(r) = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{Zr}{a_0} \right);$$

$$R_{20}(r) = 2 \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) \exp \left( -\frac{Zr}{2a_0} \right);$$

$$R_{21}(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{2a_0} \exp \left( -\frac{Zr}{2a_0} \right);$$

$$R_{30}(r) = 2 \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2}{3} \left( \frac{Zr}{3a_0} \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{Zr}{3a_0} \right);$$

$$R_{31}(r) = \frac{8}{3\sqrt{2}} \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{Zr}{6a_0} \right) \frac{Zr}{3a_0} \exp \left( -\frac{Zr}{3a_0} \right);$$

$$R_{32}(r) = \frac{4}{3\sqrt{10}} \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left( \frac{Zr}{3a_0} \right)^2 \exp \left( -\frac{Zr}{3a_0} \right).$$





*Учебное издание*

Никитин Николай Викторович  
Шарапова Полина Родионовна  
Колотинский Николай Васильевич

## СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

*Учебное пособие*

Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать 21.05.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая. Усл. печ. лист. 9. Тираж 50 экз. Заказ №Т-104-15.

Издательство: ООО «Книжный Дом Университет». 119234, Россия, г. Москва, а/я 587, тел.:(495) 638-57-34

Отпечатано с материалов, представленных авторами, в типографии «КДУ». Тел. (495) 638-57-34; <http://www.kdu.ru>

2015